

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
"Тверской государственный университет"

**Е.М. Ершова**

**ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ:  
ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ**

Учебное пособие

Издание 2

Тверь 2023

**Ершова Е.М.**

Теория случайных процессов: примеры и задачи: Учеб. пособие. - Тверь, Твер. гос. ун-т, 2023. - 57 с.

Учебное пособие по теории вероятностей подготовлено в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 10.05.01 — Компьютерная безопасность. Содержит справочные сведения по теории, примеры решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения.

Адресовано студентам математических специальностей университета, аспирантам, преподавателям и слушателям факультета повышения квалификации.

©Тверской государственный университет, 2023

© Ершова Е.М., 2023

## Предисловие

Пособие подготовлено на основе материалов, используемых автором при проведении практических занятий по теории вероятностей со студентами математического факультета Тверского государственного университета. В начале каждого параграфа помещены краткие теоретические сведения, затем обсуждается решение типовых задач. В конце параграфа приводится список задач для проведения практических занятий и выдачи домашнего задания.

Задачи отобраны из популярных отечественных учебников и задачников, список которых приведен в конце книги. Используются также задачи, придуманные автором.

## Введение

Теория случайных процессов возникла из-за практической необходимости математического моделирования реальных процессов различной природы, состояние каждого из которых в любой фиксированный момент времени представляет собой случайный вектор соответствующей размерности. Например, процесс изменения во времени пространственных координат частицы, совершающей броуновское движение, процессы спроса и предложения на рынке товаров и т.д.

Фактически теория случайных процессов занимается изучением различных семейств случайных величин, эволюционирующих во времени.

Теория случайных процессов выделилась из теории вероятностей сравнительно недавно. Она еще настолько тесно связана с другими разделами теории вероятностей, что границу, отделяющую ТСП от этих разделов, часто трудно точно определить.

Выделяют 5 основных задач ТСП:

1) Построение математической модели, допускающей строгое (формальное) определение случайного процесса, а также исследование общих свойств этой модели.

2) Классификация случайных процессов.

3) Отыскание для различных классов случайных процессов аналитического аппарата, дающего возможность вычислять вероятностные характеристики случайных процессов.

4) Наилучшее определение значения некоторого функционала от процесса по значениям других функционалов от этого процесса.

5) Изучение различных преобразований случайных процессов.

К основным областям применения ТСП относятся радио- и электротехника, кибернетика, математическая экономика, математическая биология.

# §1. Понятие случайного процесса. Сечение, траектория. Семейство конечномерных распределений. Случайная последовательность. Эквивалентные процессы.

## Теоретические сведения

Случайный процесс является математической моделью для описания случайных явлений, развивающихся во времени. При этом предполагается, что состояние процесса в текущий момент времени  $t \in \mathbb{R}$  есть векторная или скалярная случайная величина  $\xi(\omega, t)$ .

Предположим, что задано вероятностное пространство  $\langle \Omega, \mathbb{A}, P \rangle$ , где  $\Omega$  — пространство элементарных исходов,  $\mathbb{A}$  —  $\sigma$ -алгебра его подмножеств,  $P$  — вероятностная мера. Пусть  $t$  — параметр, совокупность значений которого  $T$  в общем случае является произвольным множеством,  $\omega \in \Omega$  — элементарное событие.

*Случайной функцией*  $\xi(\omega, t)$ ,  $t \in T$ , называется измеримое отображение  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , зависящее от параметра  $t$ .

Если  $T$  — отрезок числовой оси, а параметр  $t$  интерпретируют как время, то вместо термина "случайная функция" используют термин "случайный процесс". Таким образом, *случайным процессом* называется функция двух переменных  $\xi(\omega, t)$ , измеримая при каждом значении параметра  $t \in T \subset \mathbb{R}$ .

В функции  $\xi(\omega, t)$  можно зафиксировать элементарное событие  $\omega$  и получить уже неслучайную функцию от  $t$ , называемую *траекторией случайного процесса*.

Пусть  $t_0 \in T$  — фиксированный момент времени. Случайная величина  $\xi(\omega, t_0)$  называется *сечением случайного процесса* в точке  $t_0 \in T$ .

Основной характеристикой случайного процесса является семейство его конечномерных распределений.

Совокупность функций  $F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = P\{\xi(\omega, t_1) < x_1, \dots, \xi(\omega, t_n) < x_n\}$  при всевозможных значениях  $t_j \in T$ ,  $x_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  называется *семейством конечномерных распределений* случайного процесса  $\xi(\omega, t)$ .

Это семейство включает одномерные ( $F(t, x) = P\{\xi(\omega, t) < x\}$ ), двумерные ( $F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{\xi(\omega, t_1) < x_1, \xi(\omega, t_2) < x_2\}$ ) и т. д. распределения.

Семейство конечномерных распределений всякого случайного процесса обладает двумя свойствами:

- 1) симметрии  $F(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n)$ ;

2) согласованности

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = F(t_1, \dots, t_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Рассмотрим так называемый процесс с независимыми значениями. Пусть  $\xi(\omega)$  — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве, а  $F(x) = P\{\xi(\omega) < x\}$  — ее функция распределения. Рассмотрим в качестве множества  $T$  множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$ .

*Случайной последовательностью* называют случайный процесс  $\xi(\omega, t)$ , удовлетворяющий условиям:

1) при любом  $t \in \mathbb{N}$  случайная величина  $\xi(\omega, t)$  распределена так же, как и величина  $\xi(\omega)$ ;

2) случайные величины  $\xi(\omega, 1), \xi(\omega, 2), \dots, \xi(\omega, n), \dots$  независимы.

Все сечения такого процесса можно расположить в виде последовательности  $\{\xi(\omega, n)\}$ , причем все члены полученной последовательности независимы от других и одинаково распределены.

Семейство конечномерных распределений рассматриваемого случайного процесса составляют функции  $F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = F(x_1) \cdot F(x_2) \cdot \dots \cdot F(x_n)$ .

При условии абсолютной непрерывности конечномерные распределения СП можно представлять, указывая плотности совместного распределения  $f(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n)$ . При этом  $F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$ . При этом семейство конечномерных распределений соответствующего случайного процесса с независимыми значениями можно задать в виде совокупности функций  $f(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n)$ .

В случае, когда конечномерные распределения случайного процесса являются дискретными, их можно задавать, указывая вероятности совместных значений для сечений этого процесса:

$$p(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = P\{\xi(\omega, t_1) = x_1, \dots, \xi(\omega, t_n) = x_n\}.$$

Случайные процессы  $\xi(\omega, t)$  и  $\eta(\omega, t)$ , имеющие одну и ту же область определения, называются *эквивалентными* (*стохастически эквивалентными*) и обозначаются  $\xi(\omega, t) \sim \eta(\omega, t)$ , если  $P\{\xi(\omega, t) \neq \eta(\omega, t)\} = 0$  для любого  $t \in T$ . Это означает, что эквивалентные случайные процессы могут отличаться друг от друга лишь на подмножестве  $\Omega_0$  множества  $\Omega$ , имеющем нулевую вероятность.

## Решение типовых примеров

**Пример 1.** Пусть  $\Omega = [0; 1]$ ,  $\mathbb{A}$  — совокупность всех измеримых по Лебегу подмножеств  $E$  отрезка  $[0; 1]$  и вероятность события  $E$  определена как мера Лебега множества  $E$ :  $P(E) = \mu(E)$ . Совокупность  $\langle \Omega, \mathbb{A}, P \rangle$  будет вероятностным пространством. Возьмем в качестве множества  $T$  значений параметра отрезок  $[0; 1]$ :  $T = [0; 1]$  и определим функцию  $\xi(\omega, t)$  равенствами

$$\xi(\omega, t) = \begin{cases} 1, & t = \omega, \\ 0, & t \neq \omega. \end{cases}$$

Найдем ряд распределения  $\xi(\omega, t_0)$ .

Функция принимает только два значения: 0 и 1. Найдем их вероятности.  $P\{\xi(\omega, t_0) = 0\} = \mu\{[0; 1]\} = 1$ ;  $P\{\xi(\omega, t_0) = 1\} = 1 - 1 = 0$ .

Тогда 

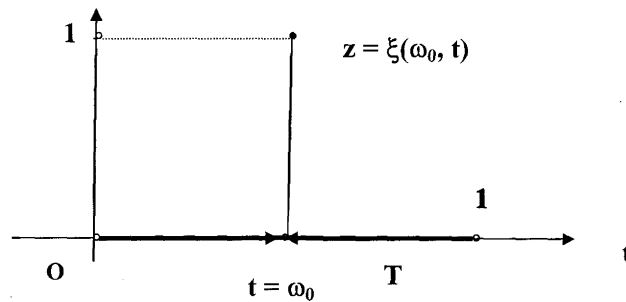
|                    |   |   |
|--------------------|---|---|
| $\xi(\omega, t_0)$ | 0 | 1 |
| $P$                | 1 | 0 |

. Мы построили сечение данного случайного процесса.

Построим какую-нибудь его траекторию. Для этого фиксируем  $\omega_0 \in [0; 1]$ . Функция  $\xi(\omega_0, t)$  определяется равенствами

$$\xi(\omega_0, t) = \begin{cases} 1, & t = \omega_0, \\ 0, & t \neq \omega_0. \end{cases}$$

и имеет график



**Пример 2.** Рассмотрим случайный процесс с независимыми значениями, считая, что величина  $\xi(\omega)$  имеет распределение Бернулли с параметром  $p$ . Это дискретное распределение описывается формулами  $P\{\xi(\omega) = x\} = p^x(1 - p)^{1-x}$ , где  $x \in \{0; 1\}$  и  $q = 1 - p$ . Ряд

распределения имеет вид 

|               |     |     |
|---------------|-----|-----|
| $\xi(\omega)$ | 1   | 0   |
| $P$           | $p$ | $q$ |

.

Тогда семейство конечномерных распределений случайного процесса  $\xi(\omega, t)$  можно описать с помощью вероятностей

$$p(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \dots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} = \\ = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i},$$

где  $x_1, \dots, x_n \in \{0; 1\}$ .

### Задачи

#### №1.

Пусть  $\xi(\omega)$  - случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром 2, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти конечномерные распределения соответствующего случайного процесса с независимыми значениями.

#### №2.

Пусть  $\xi(\omega)$  - случайная величина, имеющая распределение Пуассона, т.е.  $P\{\xi(\omega) = x\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ ,  $x = 1, \dots, n$ . Найти конечномерные распределения соответствующего случайного процесса с независимыми значениями.

#### №3.

Пусть  $X(\omega)$  - случайная величина с функцией распределения  $F(x)$  и случайный процесс задан формулой:  $\xi(\omega, t) = X(\omega) + t$ ,  $t \in T = [0; \infty)$ . Найдите одномерные распределения этого процесса.

#### №4.

Построить траектории следующих случайных процессов:  
1)  $\xi(\omega, t) = X(\omega)e^{-t}$ , где  $t > 0$ ,  $X(\omega)$  - непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале  $(-1, 1)$ ; 2)  $\xi(\omega, t) = e^{-X(\omega)t}$ ,  $t > 0$ , где  $X(\omega)$  - случайная величина, принимающая только положительные значения; 3)  $\xi(\omega, t) = at + X(\omega)$ , где  $X(\omega)$  - случайная величина, принимающая только положительные значения; 4)  $\xi(\omega, t) = X(\omega)t + a$ , где  $X(\omega)$  - случайная величина,  $a$  - неслучайная величина; 5)  $\xi(\omega, t) = X(\omega) \cos(at)$ , где  $t > 0$ ,  $X(\omega)$  - случайная величина,  $a$  - неслучайная величина; 6)  $\xi(\omega, t) = \cos(X(\omega)t)$ , где  $t > 0$ ,  $X(\omega)$  - случайная величина, принимающая только положительные значения.

№5.

Случайный процесс задан соотношением  $\xi(\omega, t) = tX(\omega)$ ,  $t \in [0; 1]$ , где  $X(\omega)$  – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0; 1]$ . Описать множество сечений и траекторий случайного процесса  $\xi(\omega, t)$ . Построить график траектории  $\xi(\omega_1, t)$ , если  $X(\omega_1) = \frac{3}{4}$ .

№6.

Случайный процесс задан соотношением  $\xi(\omega, t) = \varphi(t)U$ ,  $t \in [0; 1]$ , где  $U$  – некоторая случайная величина с функцией распределения  $F_U(x)$ , а  $\varphi(t) > 0$ . Найти семейство конечномерных распределений процесса  $\xi(\omega, t)$ .

№7.

Пусть  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами 0 и  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Случайный процесс определен соотношением  $\xi(\omega, t) = \frac{X+Y}{t}$ ,  $t > 0$ . Вычислить  $P\{|\xi(\omega, t)| < \frac{3}{t}\}$  для произвольного  $t > 0$ .

№8.

Случайный процесс задан соотношением  $\xi(\omega, t) = X^2 + 2tY + t^2$ ,  $t > 0$ , где  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Найти вероятность того, что  $\xi(\omega, t)$  монотонно не убывает.

№9.

Случайный процесс задан соотношением  $\xi(\omega, t) = Xt^2 + tY$ ,  $t > 0$ , где  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Найти вероятность того, что  $\xi(\omega, t)$  монотонно не убывает.

№10.

В условиях предыдущей задачи найти вероятность события  $\min_{t>0} \xi(\omega, t) < 0$ .

№11.

Случайная величина  $X(\omega)$  имеет функцию распределения  $F(x)$ . найти одномерные распределения случайных процессов: 1)  $\xi(\omega, t) = 2tX(\omega) + 5$ ,  $t > 0$ ; 2)  $\xi(\omega, t) = 3(X(\omega) + t) + 1$ ,  $t > 0$ ; 3)  $\xi(\omega, t) = \arctg(X(\omega) - 2t)$ ,  $t > 0$ ; 4)  $\xi(\omega, t) = te^{X(\omega)}$ ,  $t < 0$ .

№12.

Построить траектории следующих случайных процессов: 1)  $\xi(\omega, t) = X(\omega)e^t$ , где  $t > 0$ ,  $X(\omega)$  – непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале  $(-1, 1)$ ; 2)  $\xi(\omega, t) = X(\omega) \sin(at)$ , где  $X(\omega)$  – случайная величина,  $a$  – неслучайная вели-

чина; 3)  $\xi(\omega, t) = \sin(t + X(\omega))$ , где  $X(\omega)$  - случайная величина.

№13.

Найти конечномерные распределения соответствующего случайного процесса с независимыми значениями, если  $\xi(\omega)$  - случайная величина, распределенная по: 1) геометрическому закону с параметром 0,5; 2) равномерному закону на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ; 3) нормальному закону с параметрами 2 и 5.

№14.

Случайный процесс задан соотношением  $\xi(\omega, t) = -tX(\omega) + 4$ ,  $t \in [-1; 3]$ , где  $X(\omega)$  - случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0; 1]$ . Описать множество сечений и траекторий случайного процесса  $\xi(\omega, t)$ . Построить график траектории  $\xi(\omega_1, t)$ , если  $X(\omega_1) = \frac{1}{2}$ .

№15.

Материальная точка остается на месте или движется вдоль прямой равномерно со скоростью  $V$ . Пусть  $V$  - случайная величина, заданная таблицей распределения

|   |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|
| V | 0   | 0,5 | 1   |
| P | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

Тогда путь, проходимый точкой за время  $t$  будет случайным процессом  $S(\omega, t) = Vt + s_0$ , где  $s_0$  - расстояние точки от начала в момент  $t = 0$ ,  $s_0 = \text{const}$ . Построить графики траекторий этого процесса и таблицу распределения сечения в момент  $t = 2$ , считая  $s_0 = 1$ .

№16.

Случайный процесс на промежутке  $(0; T]$  задан формулой  $\xi(\omega, t) = A(\omega)t^2$ , где  $A(\omega)$  - равномерно распределенная случайная величина на промежутке  $[0; 2]$ . Найти одномерные функцию распределения и плотность вероятности этого процесса.

№17.

Случайный процесс на промежутке  $[0; 2]$  задан формулой  $\xi(\omega, t) = At^2$ , где  $A$  - случайная величина, равновероятно принимающая значения -2; -1; 1; 2. Построить графики траекторий процесса и ряд распределения любого сечения.

№18.

Пусть распределение дискретной случайной величины  $\eta$  задано рядом распределения

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $y_i$ | -1  | 1   | 2   |
| $p_i$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

, а  $\xi(\omega, t) = t\eta$ ,  $t > 0$ . Построить графики всех реализаций и функции  $y = M\eta \cdot t$ .

### №19.

Процесс на промежутке времени  $[0; 2\pi]$  задан формулой  $\xi(\omega, t) = A \sin(bt+c)$ , где  $A$  — случайная величина, распределенная равномерно на промежутке  $[0; 2]$ ;  $b, c$  — постоянные. Определить вероятность попадания траектории целиком в полосу  $-0,5 \leq y \leq 1$ .

### №20.

Случайный процесс задан формулой  $\xi(\omega, t) = e^{Xt}$ , где  $t \in (0; +\infty)$ ,  $X$  — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda$ . Найти одномерные функцию распределения и плотность вероятности процесса.

## §2. Математическое ожидание, дисперсия и ковариационная функция.

### Теоретические сведения

*Моментами  $k$ -го порядка* случайного процесса называют соответствующие моменты его сечений.

Неслучайная функция  $m(t) = M\xi(\omega, t)$ ,  $t \in T$  называется *математическим ожиданием* процесса  $\xi(\omega, t)$ .

*Дисперсией* случайного процесса  $\xi(\omega, t)$  называется неслучайная функция  $D(t) = D\xi(\omega, t) = M(\xi(\omega, t) - m(t))^2$ ,  $t \in T$ .

Будем считать, что для случайного процесса  $\xi(\omega, t)$  при каждом  $t \in T$  существуют  $m(t) = M\xi(\omega, t)$  и  $\alpha_2(t) = M\xi^2(\omega, t)$ . Тогда дисперсию  $\xi(\omega, t)$  можно находить по формуле  $D(t) = \alpha_2(t) - m^2(t)$ .

*Ковариационной функцией* случайного процесса  $\xi(\omega, t)$ ,  $t \in T$ , называется неслучайная функция двух переменных  $r(t, u)$ , заданная на квадрате  $T \times T$  формулой  $r(t, u) = M(\xi(\omega, t) - m(t))(\xi(\omega, u) - m(u))$ .

При любых  $t, u \in T$  функция  $r(t, u)$  численно равна ковариации сечений случайного процесса  $\xi(\omega, t)$  и  $\xi(\omega, u)$  в точках  $t, u \in T$  и характеризует степень линейной зависимости между сечениями.

*Коэффициент корреляции* есть  $\bar{r}(t, u) = \frac{r(t, u)}{\sigma(t)\sigma(u)}$ . По его величине судят о степени линейности связи между сечениями  $\xi(\omega, t)$  и  $\xi(\omega, u)$  случайного процесса.

### Решение типовых примеров

**Пример:** Пусть  $\alpha = \alpha(\omega)$  и  $\beta = \beta(\omega)$  — случайные величины с математическими ожиданиями  $m_\alpha$ ,  $m_\beta$ , дисперсиями  $\sigma_\alpha^2$ ,  $\sigma_\beta^2$  и ковариацией, равной  $k$ . Случайный процесс задан формулой  $\xi(\omega, t) =$

$= \alpha \cos \varphi t + \beta \sin \varphi t, t \in T = [0; \infty), \varphi \in \mathbb{R}$  — постоянная. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию этого процесса.

По свойствам математического ожидания

$$\begin{aligned} m(t) = M\xi(\omega, t) &= M[\alpha(\omega) \cos \varphi t + \beta(\omega) \sin \varphi t] = M(\alpha(\omega)) \cos \varphi t + \\ &+ M(\beta(\omega)) \sin \varphi t = m_\alpha \cos \varphi t + m_\beta \sin \varphi t; \\ D(t) = D\xi(\omega, t) &= M[(\alpha - m_\alpha) \cos \varphi t + (\beta - m_\beta) \sin \varphi t]^2 = \\ &= M(\alpha - m_\alpha)^2 \cos^2 \varphi t + 2M(\alpha - m_\alpha)(\beta - m_\beta) \cos \varphi t \times \\ &\times \sin \varphi t + M(\beta - m_\beta)^2 \sin^2 \varphi t = \sigma_\alpha^2 \cos^2 \varphi t + \\ &+ 2 \operatorname{cov}(\alpha, \beta) \cos \varphi t \sin \varphi t + \sigma_\beta^2 \sin^2 \varphi t = \\ &= \sigma_\alpha^2 \cos^2 \varphi t + k \sin 2\varphi t + \sigma_\beta^2 \sin^2 \varphi t; \\ r(t, u) &= \operatorname{cov}(\xi(t), \xi(u)) = M(\xi(t) - m(t))(\xi(u) - m(u)) = \\ &= M[(\alpha - m_\alpha) \cos \varphi t + (\beta - m_\beta) \sin \varphi t][(\alpha - m_\alpha) \cos \varphi u + \\ &+ (\beta - m_\beta) \sin \varphi u]. \end{aligned}$$

Обозначим  $\alpha_0 = \alpha - m_\alpha, \beta_0 = \beta - m_\beta$ . Тогда  $M\alpha_0 = 0, M\beta_0 = 0, D\alpha_0 = \sigma_\alpha^2, D\beta_0 = \sigma_\beta^2, \operatorname{cov}(\alpha_0, \beta_0) = k$ . Следовательно,  $M\alpha_0^2 = D\alpha_0 = \sigma_\alpha^2, M\beta_0^2 = D\beta_0 = \sigma_\beta^2$ . Получаем:

$$\begin{aligned} r(t, u) &= M[\alpha_0 \cos \varphi t + \beta_0 \sin \varphi t][\alpha_0 \cos \varphi u + \beta_0 \sin \varphi u] = \\ &= M(\alpha_0^2 \cos \varphi t \cos \varphi u) + M(\alpha_0 \beta_0 \cos \varphi t \sin \varphi u) + \\ &+ M(\alpha_0 \beta_0 \cos \varphi u \sin \varphi t) + M(\beta_0^2 \sin \varphi t \sin \varphi u) = \\ &= \sigma_\alpha^2 \cos \varphi t \cos \varphi u + k \cos \varphi t \sin \varphi u + k \cos \varphi u \sin \varphi t + \\ &+ \sigma_\beta^2 \sin \varphi t \sin \varphi u. \end{aligned}$$

Если  $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2$ , то  $r(t, u) = \sigma^2 \cos \varphi(t - u) + k \sin \varphi(t + u)$ .

Если величины  $\alpha$  и  $\beta$  некоррелированы, то  $k = 0$  и  $r(t, u) = \sigma^2 \cos \varphi(t - u)$ .

В рассмотренном примере для  $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma^2$  и  $k = 0$  получаем  $\bar{r}(t, u) = \cos \varphi(t - u)$ .

### Задачи

#### №1.

Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = X \sin at$ , где  $a$  - постоянная частота,  $MX = 1, DX = 0, 2$ .

№2.

Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = Xe^{-t^2}$ , где  $X$  – случайная величина,  $MX = 2$ ,  $DX = 0,01$ .

№3.

Пусть  $U, V$  – некоррелированные случайные величины,  $MU = 0,5$ ,  $MV = 0,5$ ,  $DU = 1$ ,  $DV = 0,05$ . Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = Ut + Vt^2$ .

№4.

Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и коэффициент корреляции случайного процесса  $\xi(\omega, t) = Xe^{-t}$ , где  $X$  – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами  $m$  и  $\sigma$ .

№5.

Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и коэффициент корреляции случайного процесса  $\xi(\omega, t) = a\omega + t$ , где  $\omega$  – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами  $m$  и  $\sigma$ ,  $a$  – постоянная.

№6.

Найдите математическое ожидание, дисперсию, ковариационную функцию и коэффициент корреляции случайного процесса  $\xi(\omega, t) = Xt + a$ , где  $X$  – случайная величина, распределенная по закону равномерной плотности на интервале  $(\alpha, \beta)$ ,  $a$  – неслучайная величина.

№7.

Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = Ue^{-Vt}$ , где  $U$  распределена по нормальному закону с параметрами  $m$  и  $\sigma$ ,  $V$  распределена равномерно в интервале  $(0; a)$ , и случайные величины  $U$  и  $V$  независимы.

№8.

Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = U \sin kt + 3t^2V + 5$ ,  $t \in T = [0; \infty)$ , где  $k$  – параметр,  $MU = 1$ ,  $MV = 2$ ,  $DU = 0,1$ ;  $DV = 0,9$ ;  $\text{cov}(U, V) = -0,3$ .

№9.

Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = \alpha t + \beta t^2$ ,  $t \in (0; \infty)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с параметрами  $m = 0$  и  $\sigma = 0,5$ .

№10.

Случайный процесс определяется формулой

$$\xi(\omega, t) = \alpha \sin(At + \beta) + \varepsilon,$$

где  $A$  – постоянная,  $\alpha, \beta, \varepsilon$  – независимые случайные величины,  $M\alpha = 0$ ,  $D\alpha = 1$ ,  $\beta$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ,  $M\varepsilon = 0$ ,  $D\varepsilon = \sigma^2$ . Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.

№11.

Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = Ue^{iVt}$ , где  $U$  и  $V$  – независимые случайные величины,  $MU = 0$ ,  $DU = D$ , а случайная величина  $V$  распределена по закону Коши с плотностью вероятности  $f_V(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$ ,  $\alpha > 0$ .

№12.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = \frac{U}{1+t^2}$ ,  $t \in [a; b]$ , где  $U$  – скалярная случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром 0,5.

№13.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = U \cos(Vt)$ , если случайные величины  $U$  и  $V$  независимы и распределены равномерно на отрезках  $[-A; A]$  и  $[-B; B]$  соответственно.

№14.

Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = Xe^{iat} + Ye^{-iat}$ , если  $a$  – постоянная, случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

№15.

Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t) = \alpha \cos(at + \beta)$ , если  $a$  – постоянная, случайные величины  $\alpha$  и  $\beta$  независимы и распределены равномерно на отрезках  $[-A; A]$  и  $[-\pi; \pi]$  соответственно.

№16.

Случайный процесс задан формулой  $\xi(\omega, t) = \sin(t + \pi\eta_1) + \sin \pi(t + \eta_2)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , где  $\eta_1$  и  $\eta_2$  независимы и равномерно распределены на  $[-1; 1]$ . Найти математическое ожидание и дисперсию данного процесса.

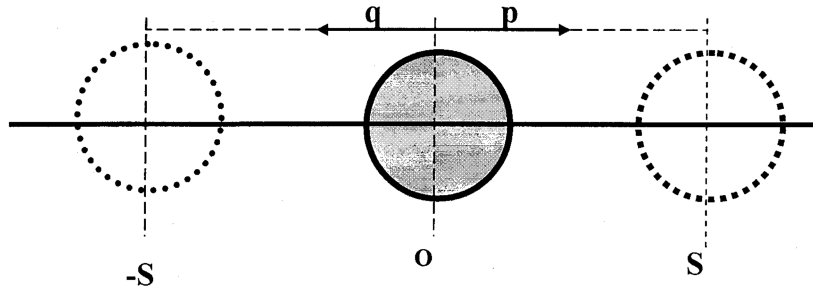
Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса  $\xi(\omega, t)$ , если  $U$  и  $V$  — некоррелированные случайные величины.

- 1)  $\xi(\omega, t) = t^2 U + V \cos t - \sin t$ ,  $U \in N(3; 2)$ ,  $V \in E(0, 5)$ ;
- 2)  $\xi(\omega, t) = t^3 U - V \cos t - 2$ ,  $U \in R(-1; 3)$ ,  $V \in E(0, 4)$ ;
- 3)  $\xi(\omega, t) = U \cos 3t - V \sin t - t$ ,  $U \in R(-1; 3)$ ,  $V \in N(-1; 0, 5)$ ;
- 4)  $\xi(\omega, t) = e^t U - V \sin t + t$ ,  $U \in N(-2; 2)$ ,  $V \in E(4)$ ;
- 5)  $\xi(\omega, t) = t^2 - e^{-2t} U - Vt$ ,  $U \in N(-1; 0, 7)$ ,  $V \in E(0, 5)$ ;
- 6)  $\xi(\omega, t) = tU - V \sin 2t + 4t^2$ ,  $U \in R(3; 6)$ ,  $V \in N(2; 3)$ ;
- 7)  $\xi(\omega, t) = 5t + 3t^2 U - Ve^{2t}$ ,  $U \in N(-2; 1, 5)$ ,  $V \in E(0, 2)$ ;
- 8)  $\xi(\omega, t) = e^{-t} + U \cos t - Vt$ ,  $U \in E(\frac{1}{4})$ ,  $V \in R(-5; -1)$ .

### §3. Случайные блуждания на прямой. Моделирование траекторий.

#### Теоретические сведения

Пусть физическая частица, находящаяся в начальный момент времени в начале координат, получает в моменты времени  $h, 2h, 3h, \dots$  случайные толчки. В результате одного толчка частица смещается вправо или влево на величину  $s$  с вероятностями  $p$  и  $q$  соответственно, где  $p + q = 1$ .



Требуется описать положение частицы в момент времени  $t = nh$ , где  $n$  — произвольное натуральное число. Координата частицы является функцией двух переменных, обозначим ее  $\xi(\omega, t)$ . Функция  $\xi(\omega, t)$  представляет собой случайный процесс, называемый *процессом случайных блужданий*. Семейство его конечномерных распределений описывается формулами

$$p(t_1, \dots, t_k, x_1, \dots, x_k) = C_{n_1}^{m_1} C_{n_2 - n_1}^{m_2 - m_1} \dots C_{n_k - n_{k-1}}^{m_k - m_{k-1}} p^{m_k} q^{n_k - m_k},$$

где  $t_k = n_k h$ ,  $x_k = (2m_k - n_k)s$ ,  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ,  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$  и  $m_1 \leq n_1$ ,  $m_2 \leq n_2$ , ...,  $m_k \leq n_k$ .

Во всех остальных случаях вероятности совместных значений будут равны нулю.

### Решение типовых примеров

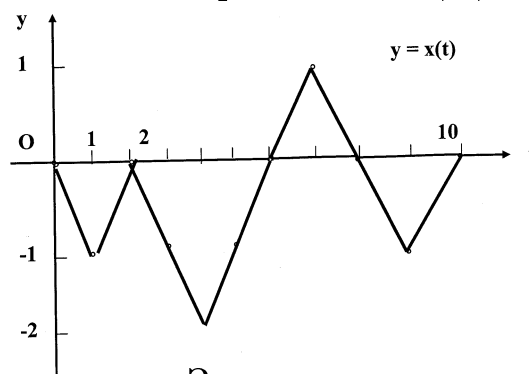
Рассмотрим выборочные функции процесса случайных блужданий. Воспользуемся представлением  $\xi(\omega, t) = [2m(\omega, t) - \frac{t}{h}]s$ , где  $m(\omega, t)$  — число толчков вправо, полученных частицей за время  $t$ . Если  $t = kh$ , то  $m(\omega, t)$  можно рассматривать как число успехов в  $k$  независимых испытаниях, причем вероятность успеха в одном испытании равна  $p$ .

Задавая вероятность успеха  $p$ , можно моделировать случайные блуждания на прямой. Например, если  $p = \frac{1}{2}$ , то, бросая монету, будем истолковывать выпадение герба как успех и полагать  $\omega_i = 1$ , а в противном случае  $\omega_i = 0$ .

**Пример:** Пусть  $k$  принимает значения от 0 до 10. Зафиксируем какой-нибудь элементарный исход  $\omega_0$ . Он представляет собой цепочку из нулей и единиц, например,  $\omega_0 = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ . Возьмем  $h = 1$ ,  $s = 1$  и построим траекторию частицы, соответствующую исходу  $\omega_0$ . Обозначим эту траекторию  $x(t)$ . Составим таблицу, в которой перечислены компоненты  $\omega_i$  исхода  $\omega_0$ , значения времени  $t$  и соответствующие значения функции  $x(t)$ .

|            |    |   |    |    |    |   |   |   |    |    |
|------------|----|---|----|----|----|---|---|---|----|----|
| $\omega_i$ | 0  | 1 | 0  | 0  | 1  | 1 | 1 | 0 | 0  | 1  |
| $t$        | 1  | 2 | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 |
| $x(t)$     | -1 | 0 | -1 | -2 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0  |

Полученная траектория состоит из отдельных точек. Соединим их отрезками. Получим ломаную линию, вершины которой изображают положение частицы в моменты времени  $t = 0, 1, \dots, 10$ .



### Задачи

#### №1.

Построить траекторию случайных блужданий на прямой, соответствующую элементарному исходу  $\omega = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$  при  $t = kh$ ,  $k = \overline{0, 10}$ ,  $h = \frac{1}{2}$ ,  $s = 1$ .

№2.

Построить траекторию случайных блужданий на прямой, соответствующую элементарному исходу  $\omega = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$  при  $t = kh$ ,  $k = \overline{0, 10}$ ,  $h = 2$ ,  $s = \frac{1}{2}$ .

№3.

Построить траекторию случайных блужданий на прямой, смоделировав элементарный исход при помощи бросания монеты, при  $t = kh$ ,  $k = \overline{0, 10}$ ,  $h = \frac{1}{2}$ ,  $s = 1$ .

№4.

Построить траекторию случайных блужданий на прямой, смоделировав элементарный исход при помощи бросания монеты, при  $t = kh$ ,  $k = \overline{0, 8}$ ,  $h = 2$ ,  $s = \frac{3}{2}$ .

## §4. Процесс Пуассона.

### Теоретические сведения

Предположим, что в случайные моменты времени происходит некоторое событие  $A$ , и  $\eta$  — промежуток времени, прошедший между двумя последовательными появлениями события. Случайная величина  $\eta$  называется *временем ожиданий*. Она распределена по закону  $F_\eta(t) = P\{\eta < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$ .

Вероятность появления события  $A$   $k$  раз за время от 0 до  $t$  вычисляется по формуле  $p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

*Процессом Пуассона* с параметром  $\lambda > 0$  называется скалярный случайный процесс  $\xi(\omega, t)$ ,  $t \in T = [0; \infty)$ , обладающий следующими свойствами:

1)  $\xi(\omega, 0) = 0$ ;  
2) для любых  $n > 1$  и  $t_k \in T$ ,  $k = \overline{1, n}$ , таких, что  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  случайные величины  $\xi(\omega, t_k) - \xi(\omega, t_{k-1})$ ,  $k = \overline{1, n}$ , независимы;

3) для любых  $t_1, t_2 \in T$  таких, что  $0 < t_1 < t_2$ , случайная величина  $\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1)$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda(t_2 - t_1)$ , т.е.  $P\{\xi(\omega, t_2) - \xi(\omega, t_1) = k\} = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Его семейство конечномерных распределений определяется фор-

мулой

$$\begin{aligned}
 p(t_1, \dots, t_n, k_1, \dots, k_n) &= P\{\xi(\omega, t_1) = k_1, \dots, \xi(\omega, t_n) = k_n\} = \\
 &= p_{k_1}(t_1) p_{k_2-k_1}(t_2 - t_1) \dots p_{k_n-k_{n-1}}(t_n - t_{n-1}) = \\
 &= \frac{\lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n} t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2-k_1} \dots (t_n - t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (k_n - k_{n-1})!}.
 \end{aligned}$$

### Решение типовых примеров

Параметр в процессе Пуассона не обязательно играет роль времени. Например, число частиц  $\xi(\omega, V)$ , попавших в объем  $V$ , представляет собой величину, распределенную по закону Пуассона  $P\{\xi(\omega, V) = k\} = \frac{(aV)^k}{k!} e^{-aV}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , где  $a$  — некоторая постоянная.

**Пример:** Были проведены наблюдения за числом частиц золота, взвешенных в воде в различных областях одного и того же объема.

|                                |     |     |     |    |    |   |   |   |
|--------------------------------|-----|-----|-----|----|----|---|---|---|
| Число частиц $k$               | 0   | 1   | 2   | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 |
| Число случаев $m_k$            | 112 | 168 | 130 | 69 | 32 | 5 | 1 | 1 |
| Теоретич. число случаев $m'_k$ | 110 | 173 | 131 | 67 | 26 | 8 | 2 | 1 |

Найдем число всех опытов:  $n = \sum_{k=0}^7 m_k = 518$ . Частоты наблюдавшихся чисел частиц рассчитываются по формулам  $p_k^* = \frac{m_k}{n}$ . Для закона Пуассона  $M\xi(\omega, V) = aV$ . Тогда величину  $aV$  находим из условия  $aV = \bar{x}$  (метод моментов), где  $\bar{x}$  — среднее число наблюдавшихся в одном опыте частиц:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^7 km_k \approx 1,54$ .

Тогда  $aV = 1,54$  и  $p_k = P\{\xi(\omega, V) = k\} = e^{-1,54} \frac{1,54^k}{k!}$ ,  $k = \overline{0, 7}$ .

Теоретические значения  $m'_k$  чисел опытов по фиксации  $k$  частиц вычисляются по формулам  $m'_k = np_k$ .

Сравнение 2-й и 3-й строк таблицы показывает, что гипотеза о распределении Пуассона согласуется с опытными данными.

### Задачи

#### №1.

В таблице приведены данные опыта Резерфорда по регистрации  $\alpha$ -частиц в течение промежутка времени  $t = 7,5$  секунд. Постройте по этим данным процесс Пуассона и найдите теоретические числа опытов, в которых зафиксировано от 0 до 10 частиц.

|              |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |    |
|--------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| Число частиц | 0  | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8  | 9  | 10 |
| Число опытов | 57 | 203 | 333 | 495 | 512 | 400 | 273 | 139 | 45 | 27 | 16 |

## №2.

На автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью 1,2 вызовов в минуту. Найти вероятность того, что за две минуты: 1) не придет ни одного вызова; 2) придет ровно один вызов; 3) придет хотя бы один вызов.

## №3.

Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит: а) 4 вызова; б) хотя бы один; в) ни одного вызова. (Поток заявок простейший.)

## №4.

Для анализа изменения с течением времени размера текущего фонда компании, ведущей дела по страхованию автомобилей, важно обладать информацией о процессе поступления в компанию требований по выплатам в соответствии со страховыми полисами. Наблюдение за работой компании в предшествующий период показало, что число поступающих в компанию требований по выплатам за любой промежуток времени длиной  $t$  не зависит от момента времени, с которого начинается отсчет промежутка, а зависит только от его продолжительности; требования в компанию в любые два непересекающихся интервала времени поступают независимо; в достаточно малые промежутки времени в компанию поступает по одному требованию. Ожидаемое число требований, поступающих в компанию за неделю, равно 2. Какова вероятность того, что: 1) за месяц в компанию поступит 7 требований; 2) за месяц в компанию поступит менее 7 требований; 3) за месяц в компанию поступит не менее 7 требований; 4) за месяц в компанию не поступит ни одного требования; 5) за две недели в компанию поступит хотя бы одно требование; 6) интервал времени между двумя соседними требованиями будет меньше двух дней; 7) интервал времени между двумя соседними требованиями будет не менее двух дней?

## №5.

В условиях №4 найти вероятность того, что: 1) за месяц в компанию поступит пять требований; 2) за месяц в компанию поступит

менее пяти требований; 3) за месяц в компанию поступит не менее пяти требований; 4) за две недели в компанию не поступит ни одного требования; 5) за неделю в компанию поступит хотя бы одно требование; 6) промежуток времени между двумя соседними поступлениями требований меньше четырех дней; 7) промежуток времени между двумя соседними поступлениями требований не меньше четырех дней.

№6.

Ответить на вопросы в №4, если интенсивность поступающих в компанию требований равна шести требованиям в месяц, а не двум в неделю, как в №4.

№7.

Число вкладов частных лиц в сберегательный банк за любой определенный промежуток времени, как показали предыдущие наблюдения, не зависит от начала этого промежутка, а зависит лишь от его продолжительности. Вклады в банк в любые два непересекающихся промежутка времени делаются независимо. В промежутки времени достаточно малой длины вклады в банк поступают по одному. Средний интервал времени между двумя соседними вкладами равен 3-м часам. Считая, что банк работает по 8 часов в день, найти вероятность, с которой: 1) за 2 дня в банк будет сделано 5 вкладов; 2) за 2 дня в банк будет сделано менее 5 вкладов; 3) за 2 дня в банк будет сделано не менее 5 вкладов; 4) за день в банк не будет сделано ни одного вклада; 5) за 3 дня в банк будет сделан хотя бы один вклад; 6) промежуток времени между двумя соседними вкладами в банк составит меньше 3-х часов; 7) промежуток времени между двумя соседними вкладами в банк составит не менее 3-х часов.

№8.

Процесс  $N(t)$  представляет собой простейший пуассоновский поток отказов радиотехнической системы с интенсивностью 0,002 отказа в час. Найти вероятность того, что за 100 часов наступит не менее 3 отказов.

№9.

Известно, что наборщик в среднем делает одну ошибку на две страницы текста. В набранной книге взяли наугад страницу. Какова вероятность того, что на данной странице содержится более одной опечатки? Какова вероятность того, что на данных четырех страницах содержится ровно одна опечатка?

№10.

На сервер поступает простейший поток запросов с интенсивностью

0.3 запроса в минуту. Какова вероятность того, что за 5 минут: а) не придет ни одного запроса; б) придет ровно 5 запросов; в) придет хотя бы один запрос?

## §5. Цепи Маркова. Матрицы перехода. Уравнение Маркова. Финальные вероятности.

### Теоретические сведения

Пусть  $G$  — некоторый эксперимент, имеющий конечное или счетное множество исходов  $\{E_1, E_2, \dots\}$ . Будем неограниченно повторять эксперимент  $G$ . Обозначим через  $X_n$  номер исхода  $n$ -го эксперимента.

Последовательность  $\{X_n\}$  образует *цепь Маркова*, если

$$P\{X_n = j | X_1 = k_1, \dots, X_{n-2} = k_{n-2}, X_{n-1} = i\} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i\}.$$

Числа  $p_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i\}$  называются *вероятностями перехода из состояния  $E_i$  в состояние  $E_j$  за один шаг*.

Марковская цепь  $\{X_n\}$  называется *однородной*, если вероятности  $p_{ij}^{(n)}$  не зависят от  $n$ , т.е.  $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$ .

Вероятности  $p_{ij}$  перехода системы из состояния  $E_i$  в состояние  $E_j$  для однородной цепи Маркова образуют матрицу  $P = (p_{ij})$ , которая называется *матрицей перехода цепи Маркова за один шаг*.

Она обладает свойствами:

- 1)  $p_{ij} \geq 0$ ;
- 2)  $p_{i1} + p_{i2} + \dots = 1, \quad i = 1, 2, \dots$

Цепь Маркова можно изобразить графически. Кружки изображают возможные состояния системы  $E_1, E_2, \dots$ . От каждого кружка проведем стрелки к другим и надпишем над ними вероятности перехода. При этом переходы с нулевыми вероятностями не изображаются. Полученная схема называется *орграфом* (ориентированным графом).

Вероятности  $P_{ij}(n)$  перехода из состояния  $E_i$  в момент времени  $t_k$  к состоянию  $E_j$  в момент  $t_{k+n}$  вычисляются по *уравнению Маркова*

$$P_{ij}(n) = \sum_r P_{ir}(m) P_{rj}(n - m).$$

При  $m = 1$  числа  $P_{ir}(m) = P_{ir}(1)$  представляют собой вероятности перехода за один шаг, которые обозначаются  $p_{ir}$ . Из уравнения Маркова при  $n = 2$  и  $m = 1$  получаем

$$P_{ij}(2) = \sum_r p_{ir} p_{rj}. \quad (1)$$

По этой формуле можно вычислить вероятности перехода за два шага, если известны вероятности перехода за один шаг. Далее по уравнению Маркова можно последовательно находить вероятности перехода за три шага и т.д.

Обозначим через  $P(n)$  матрицу перехода за  $n$  шагов,  $P(1) = P$ . Тогда  $P(n) = P^n$ , т. е. матрица  $P$  однозначно определяет вероятности перехода за любое число шагов.

Если задать вероятности  $p_1^0, \dots, p_N^0$  начальных состояний (состояний перед началом испытаний) цепи Маркова и вероятности перехода  $p_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , то вероятность любого события  $(i_1, \dots, i_k)$  может быть вычислена по формуле

$$P(i_1, \dots, i_k) = p_{i_1}^0 p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \dots p_{i_{k-1} i_k}.$$

Если цепь Маркова является однородной, то вектор-столбец вероятностей состояний  $\overline{P}(j)$  системы через  $j$  шагов вычисляется по формуле

$$\overline{P}(j) = (P^j)^T \overline{P}(0).$$

Вероятности состояний однородной системы Маркова  $p_i(k)$ ,  $i = \overline{1, N}$  определяются по рекуррентной формуле

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^N p_j(k-1) p_{ji}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь  $p_i(0) = p_i^0$ ,  $i = \overline{1, N}$  — вероятности начальных состояний системы.

Марковым была доказана следующая **теорема**: Пусть  $\{X_n\}$  — однородная цепь Маркова с конечным числом состояний  $E_1, \dots, E_k$ . Если при некотором  $s > 0$  все элементы матрицы  $P(s)$  положительны, то существуют такие постоянные числа  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , что независимо от индекса  $i$  имеют место равенства  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}(n) = p_j$ .

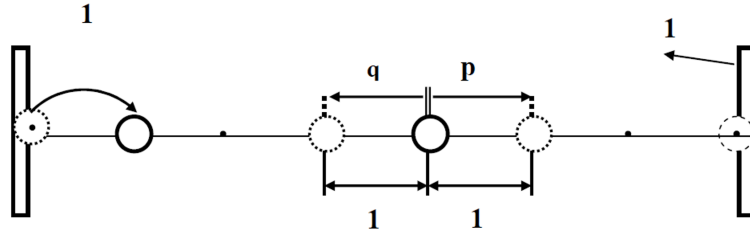
Вероятности  $p_j$  называют *финальными*. В нашем случае они удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{j=1}^k p_j = 1; \\ 2) \quad & p_j = \sum_{r=1}^k p_r p_{rj}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \tag{2}$$

## Решение типовых примеров

**Пример 1.** Рассмотрим так называемые блуждания с отражающими стенками.

Пусть физическая частица, расположенная на прямой, движется по этой прямой под влиянием случайных толчков, происходящих в моменты  $t_1, t_2, \dots$ . Частица может находиться в точках с целочисленными координатами  $a, a+1, a+2, \dots, b$ . В точках  $a$  и  $b$  находятся отражающие стенки. Каждый толчок переводит частицу на единицу вправо с вероятностью  $p$  и влево с вероятностью  $q = 1 - p$ , если частица не находится у стенки. Если же частица находится у стенки, то любой толчок переводит ее на единицу внутрь промежутка между стенками. Возможными состояниями частицы являются целочисленные точки отрезка  $[a; b]$ :  $E_1 = a, E_2 = a+1, \dots, E_{b-a+1} = b$ .



Допустим, что все начальные положения частицы на отрезке  $[a; b]$  равновозможны. Тогда  $p_j^0 = \frac{1}{k}, j = \overline{1, k}, k = b - a + 1$ .

Вероятности  $p_{ij}^{(n)}$  перехода из одного состояния в другое по условию не зависят от времени, т.е. цепь является однородной и

$$\begin{aligned} p_{11} &= 0, p_{12} = 1, p_{1j} = 0, j = 3, 4, \dots, k; \\ p_{21} &= q, p_{22} = 0, p_{23} = p, p_{2j} = 0, j = 4, 5, \dots, k; \\ &\dots\dots\dots \\ p_{kj} &= 0, j = 1, 2, \dots, k-2, p_{k, k-1} = 1, p_{kk} = 0. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Найти матрицу перехода через два шага  $P(2)$  для задачи о блужданиях с отражающими стенками.

Вероятности перехода за один шаг равны

$$\begin{aligned} p_{11} &= 0, p_{12} = 1, p_{1j} = 0, j = 3, 4, \dots, k; \\ p_{21} &= q, p_{22} = 0, p_{23} = p, p_{2j} = 0, j = 4, 5, \dots, k; \\ &\dots\dots\dots \\ p_{kj} &= 0, j = 1, 2, \dots, k-2, p_{k, k-1} = 1, p_{kk} = 0. \end{aligned}$$

Ненулевые элементы:

$$p_{12} = 1, \quad p_{i,i-1} = q, \quad p_{i,i+1} = p, \quad i = \overline{2, k-1}, \quad p_{k,k-1} = 1. \quad (3)$$

Воспользуемся формулой (1):

$$P_{11}(2) = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + \dots + p_{1k}p_{k1} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot q + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 = q,$$

$$P_{12}(2) = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + \dots + p_{1k}p_{k2} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot q + \dots + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$P_{13}(2) = p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + \dots + p_{1k}p_{k3} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot p + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 = p.$$

Аналогично  $P_{1r}(2) = 0$ ,  $r = \overline{4, k}$ , т.к.  $P_{1j}(2) = \sum_{r=1}^k p_{1r}p_{rj} = p_{12}p_{2j}$ , а  $p_{2j} \neq 0$  при  $j = 1; 3$ .

Из (1):

$$P_{ij}(2) = p_{i,i-1}p_{i-1,j} + p_{i,i+1}p_{i+1,j} = qp_{i-1,j} + pp_{i+1,j}. \quad (4)$$

Заменяя в (3)  $i$  на  $i-1$  и  $i+1$ , получим, что  $p_{i-1,i-2} = q$  и  $p_{i-1,i} = p$ ,  $i = \overline{3, k}$ ;  $p_{i+1,i} = q$  и  $p_{i+1,i+2} = p$ ,  $i = \overline{1, k-2}$ .

Вероятности  $P_{ij}(2)$  из (4) не будут нулевыми при  $i = \overline{3, k-2}$  и  $j = i-2; i; i+2$ :

$$P_{i,i-2}(2) = qp_{i-1,i-2} + pp_{i+1,i-2} = q \cdot q + p \cdot 0 = q^2;$$

$$P_{i,i}(2) = qp_{i-1,i} + pp_{i+1,i} = q \cdot p + p \cdot q = 2pq;$$

$$P_{i,i+2}(2) = qp_{i-1,i+2} + pp_{i+1,i+2} = q \cdot 0 + p \cdot p = p^2.$$

При  $i = 2$   $P_{2j}(2) = qp_{1j} + pp_{3j} \neq 0$ , если  $j = 2$  или  $j = 4$ .

$$P_{22}(2) = qp_{12} + pp_{32} = q \cdot 1 + p \cdot q = q + pq;$$

$$P_{24}(2) = qp_{14} + pp_{34} = q \cdot 0 + p \cdot p = p^2.$$

При  $i = k-1$   $P_{k-1,j}(2) = qp_{k-2,j} + pp_{k,j} \neq 0$ , если  $j = k-3$  или  $j = k-1$ .

$$P_{k-1,k-3}(2) = qp_{k-2,k-3} + pp_{k,k-2} = q \cdot q + p \cdot 0 = q^2;$$

$$P_{k-1,k-1}(2) = qp_{k-2,k-1} + pp_{k,k-1} = q \cdot p + p \cdot 1 = pq + p.$$

При  $i = k$   $P_{kj}(2) = \sum_{r=1}^k p_{kr}p_{rj} = p_{k,k-1} \cdot p_{k-1,j} \neq 0$ , когда  $j = k - 2$  и  $j = k$ .

$$P_{k,k-2}(2) = p_{k-1,k-2} = q;$$

$$P_{k,k}(2) = p_{k-1,k} = p.$$

Итак, искомая матрица перехода имеет вид

$$P(2) = \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q + pq & 0 & p^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q^2 & 0 & pq + p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q & 0 & p \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.** Матрица перехода имеет вид  $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

Применима ли теорема Маркова? Если да, то чему равны финальные вероятности?

Матрица  $P$  содержит нулевые вероятности. Найдем матрицу перехода через два шага  $P(2) = (P_{ij}(2))_{i,j=1}^3$ . Уравнение Маркова примет вид  $P_{ij}(2) = \sum_{r=1}^3 p_{ir}p_{rj}$ .

Отсюда  $P(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Т.о., при  $s = 2$  все элементы матрицы  $P(s)$  отличны от нуля. Тогда к ней применима теорема Маркова,

по которой существуют финальные вероятности  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Из (2) найдем условия для их вычисления:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ p_1 = \sum_{r=1}^3 p_r p_{r1} = p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + p_3 p_{31} = \frac{1}{2}(p_2 + p_3), \\ p_2 = \sum_{r=1}^3 p_r p_{r2} = p_1 p_{12} + p_2 p_{22} + p_3 p_{32} = \frac{1}{2}(p_1 + p_3), \\ p_3 = \sum_{r=1}^3 p_r p_{r3} = p_1 p_{13} + p_2 p_{23} + p_3 p_{33} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ 2p_1 - p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - 2p_2 + p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 - 2p_3 = 0. \end{array} \right.$$

Вычитая из 3-е уравнение из 1-го и 4-е из 1-го, получим  $3p_2 = 1$ ,  $3p_3 = 1$   
 $\Rightarrow p_2 = \frac{1}{3} = p_3$ .

Из 1-го уравнения  $p_1 = 1 - p_2 - p_3 = \frac{1}{3}$ .

Таким образом,  $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ .

### Задачи

#### №1.

В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система  $S$ , которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний:  $S_1$  – ЭВМ полностью исправна;  $S_2$  – ЭВМ имеет незначительные неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи;  $S_3$  – ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач;  $S_4$  – ЭВМ полностью вышла из строя. В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна (состояние  $S_1$ ). Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ . Процесс, протекающий в системе  $S$ , может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая, третья проверки ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью уравнения Маркова определить вероятности состояний ЭВМ после трех проверок.

## №2.

Точка  $S$  "блуждает" по оси абсцисс  $Ox$  по следующему закону: на каждом шаге она с вероятностью 0,5 остается на месте, с вероятностью 0,3 перескакивает на единицу вправо и с вероятностью 0,2 – влево. Состояние системы  $S$  после  $k$  шагов определяется одной координатой (абсциссой) точки  $S$ . Начальное положение точки – начало координат. Рассматривая последовательность положений точки  $S$  как цепь Маркова, с помощью уравнения Маркова найти вероятность того, что после четырех шагов она окажется от начала координат не дальше, чем на расстоянии, равном единице.

## №3.

Система  $S$  - техническое устройство, состоящее из 3 узлов и в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_k$  подвергающееся профилактическому осмотру и ремонту. После каждого шага (момента осмотра и ремонта) система может оказаться в одном из следующих состояний:  $S_0$  - все узлы исправны (ни один не заменен новым);  $S_1$  - один узел заменен новым, остальные исправны;  $S_2$  - два узла заменены новыми, третий исправен;  $S_3$  - все три узла заменены новыми. Вероятность того, что в момент профилактики узел придется заменить новым, равна 0,4 (независимо от состояния других узлов). Рассматривая состояния системы  $S$  как марковскую цепь, найти переходные вероятности и вычислить вероятности состояний системы после трех шагов, считая, что в начальный момент все узлы исправны.

## №4.

В моменты времени  $t_1, t_2, t_3$  производится осмотр ЭВМ. Возможные состояния ЭВМ:  $S_0$  – полностью исправна;  $S_1$  – незначительные неисправности, которые позволяют эксплуатировать ЭВМ;  $S_2$  – существенные неисправности, дающие возможность решать ограниченное число задач;  $S_3$  – ЭВМ полностью вышла из строя. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить граф состояний. С помощью уравнения Маркова найти вероятности состояний ЭВМ после одного, двух, трех осмотров, если вначале (при  $t = 0$ ) ЭВМ была полностью исправна.

№5.

Случайное блуждание с поглощением. Пусть частица может передвигаться по прямой под действием случайных толчков. В точках  $x = 1$  и  $x = N$  стоят поглощающие экраны. При каждом случайном толчке частица передвигается на единицу длины вправо с вероятностью  $p$  и влево с вероятностью  $q$ ,  $p + q = 1$ , однако, попав в точки  $x = 1$  и  $x = N$ , частица остается в этих точках. Запишите для этого случая матрицу перехода за 1 шаг.

№6.

Матрица перехода за один шаг для цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицы перехода за 2 и 3 шага.

№7.

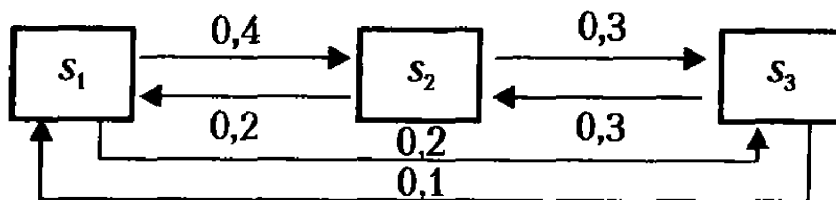
Вероятности перехода в однородной цепи Маркова задаются матрицей

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

а) Чему равно число состояний этой цепи? б) Найти вероятности перехода из состояния в состояние за три шага.

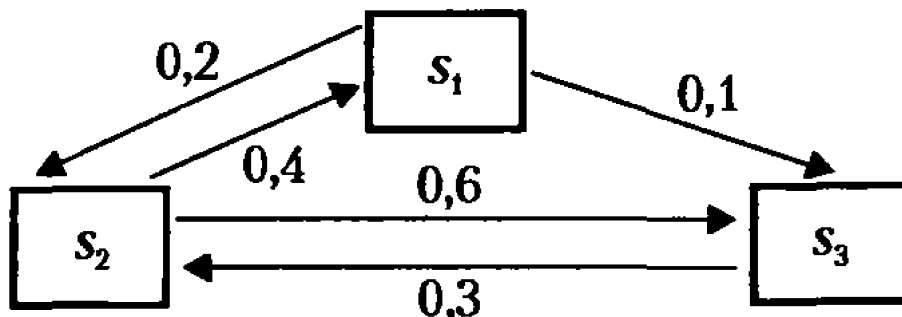
№8.

Рассмотрим состояния банка, характеризующиеся одной из процентных ставок: 2%, 3%, 4%, которые устанавливаются в начале каждого квартала и фиксированы на всем его протяжении. Таким образом, если за систему  $S$  принять рассматриваемый банк, то она в каждый момент времени может находиться только в одном из следующих трех состояний:  $S_1$  – процентная ставка 2%,  $S_2$  – процентная ставка 3%,  $S_3$  – процентная ставка 4%. Анализ работы банка в предшествующие годы показал, что изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало. Определите вероятности указанных состояний банка в конце года, если в конце предыдущего года процентная ставка банка составляла 3%, а размеченный граф состояний банка (кроме переходов  $S_i \rightarrow S_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ ) изображен на рисунке:



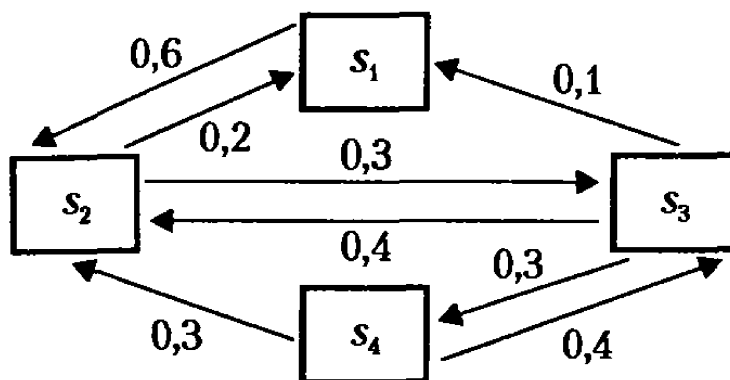
№9.

Состояния банка  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  характеризуются соответственно процентными ставками 5%, 8% и 11%, которые устанавливаются в начале года и не меняются до следующего года. Переходные вероятности постоянны. Спрогнозируйте, какая ставка будет в 2004 году, если в 2000 году процентная ставка была 5%, а размеченный граф состояний (кроме переходов  $S_i \rightarrow S_i, i = \overline{1,3}$ ) представлен на рисунке:



№10.

Рассмотрим состояния банка  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ , характеризующиеся соответственно процентными ставками 3%, 4%, 5%, 6%, которые устанавливаются в начале каждого месяца и фиксированы на всем его протяжении. Наблюдение за работой банка в предшествующий период показало, что переходные вероятности состояний в течение квартала изменяются пренебрежимо мало и, следовательно, их можно считать постоянными. Определить вероятности состояния банка в конце квартала, если в конце предшествующего квартала процентная ставка составляла 5%, а размеченный граф состояния банка (кроме переходов  $S_i \rightarrow S_i, i = \overline{1,4}$ ) имеет следующий вид:



№11.

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  система с равной вероятностью находится в одном из возможных состояний, изображаемых точкой на оси  $Ox$ :  $x = -1$  – состояние  $S_1$ ;  $x = 0$  – состояние  $S_2$ ;  $x = 1$  – состояние  $S_3$ ;  $x = 2$  – состояние  $S_4$ . В зависимости от случая точка может перемещаться вправо или влево на единичное расстояние: вправо с вероятностью  $1/6$ , влево с вероятностью  $5/6$ . Из состояний  $S_1$  и  $S_4$  перемещения невозможны. Найдите матрицу переходных вероятностей и векторы вероятностей состояний на нулевом, первом и втором шагах.

№12.

Для однородной цепи Маркова заданы матрица переходных вероятностей и вектор вероятностей состояний на нулевом шаге:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите векторы вероятностей состояний после первого и второго шагов.

№13.

В цепи Маркова с двумя состояниями 1 и 2 начальным состоянием является 1. Найти: 1) вероятности цепочек состояний 111, 122, 121, если вероятности переходов задаются равенствами  $p_{12} = \frac{1}{3}$ ,  $p_{21} = \frac{1}{4}$ ; 2) вероятность того, что цепочка длины 3 начинается и кончается единицей; 3) вероятности перехода за два шага.

№14.

В цепи Маркова с двумя состояниями 1 и 2 вектор распределения вероятностей по начальным состояниям и вероятности переходов определяются равенствами  $p_1(0) = \frac{1}{3}$ ,  $p_{11} = \frac{6}{7}$ ,  $p_{21} = \frac{4}{5}$ . Найти вероятности цепочек 121, 111, 222. Найти вероятности событий  $A$  – {в цепочке длины 3 состояния чередуются},  $B$  – {в цепочке длины 3 все состояния одинаковы}.

№15.

В цепи Маркова с тремя состояниями 1, 2 и 3 начальным состоянием является 1. Вероятности перехода за один шаг определяются равенствами  $p_{11} = \frac{1}{5}$ ,  $p_{12} = \frac{2}{5}$ ,  $p_{21} = \frac{1}{3}$ ,  $p_{22} = \frac{2}{3}$ ,  $p_{31} = \frac{1}{7}$ ,  $p_{32} = \frac{2}{7}$ . Найти вероятность того, что в цепочке длины 3 не появится состояние 2.

### №16.

Найти матрицу вероятностей переходов цепи Маркова, дающей упрощенное описание работы телефона-автомата. Рассматриваются следующие 4 состояния: телефон свободен (1-е состояние); телефон занят и нет очереди (2-е состояние), телефон занят и в очереди стоит 1 человек (3-е состояние) или 2 человека (4-е состояние). Предполагается, что третьим в очередь никто не встает, предпочитая искать другой автомат. В каждую единицу времени с вероятностью  $1/10$  может подойти один человек; больше одного подойти не может. С вероятностью  $1/3$  независимо от длительности ведущегося разговора и независимо от длины очереди разговор в данную единицу времени заканчивается. Определить вероятность того, что телефон-автомат через 2 единицы времени будет свободен, если он был свободен в начальный момент.

### №17.

Через фиксированные промежутки времени проводится контроль технического состояния прибора, который может находиться в одном из трех состояний:  $S_1$  – работает,  $S_2$  – не работает и ожидает ремонта,  $S_3$  – ремонтируется. Переходная матрица имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & p_{13} \\ 0,3 & p_{22} & 0,6 \\ p_{31} & 0,01 & 0,29 \end{pmatrix}.$$

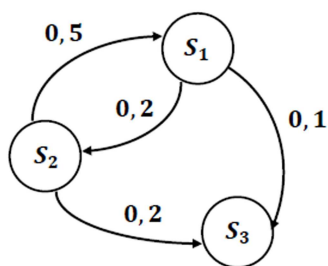
Найти неизвестные элементы матрицы и вычислить вектор вероятности состояний через два шага при условии, что в начальный момент времени прибор исправен.

### №18.

В некоторой стране погода такова, что два дня подряд никогда не бывают ясными. Если в какой-то день ясно, то на следующий день с равными вероятностями будет либо дождь, либо снег. Если идет дождь или снег, то с одной и той же вероятностью погода на следующий день либо останется такой же, либо изменится. Если она меняется, то в половине случаев на следующий день будет ясная погода. Записать матрицу перехода.

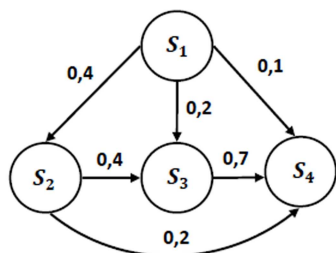
### №19.

Пусть есть некоторое техническое устройство, которое может находиться в одном из трех состояний: исправно ( $s_1$ ), ремонтируется ( $s_2$ ), списано ( $s_3$ ). Граф состояний имеет вид (кроме переходов  $S_i \rightarrow S_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ ):



Предполагая, что в начальный момент времени устройство исправно, найти вероятности его состояний на 1-м, 2-м и 3-м шагах.

№20.



По цели ведется стрельба 4-мя выстрелами. Возможные состояния цели:  $S_1$  — цель невредима;  $S_2$  — цель незначительно повреждена;  $S_3$  — цель имеет существенные повреждения;  $S_4$  — цель разрушена.

Граф состояний (кроме переходов  $S_i \rightarrow S_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ ) имеет вид (см. рис.). В начальный момент цель находится в состоянии  $S_1$ . Определить вероятности состояний после 4-х выстрелов.

№21.

Цепь Маркова с состояниями  $S_1$  и  $S_2$  задана матрицей перехода  $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . В качестве начального состояния процесса устройство выбирает  $S_1$  с вероятностью  $\frac{1}{4}$  и  $S_2$  с вероятностью  $\frac{3}{4}$ . Найти вероятность того, что после 1-го шага процесс перейдет в состояние  $S_1$ .

№22.

На окружности расположены шесть точек  $E_1, \dots, E_6$ , равноотстоящих друг от друга. Частица движется из точки в точку следующим образом. Из данной точки она перемещается в одну из ближайших соседних точек с вероятностью  $1/4$  или диаметрально противоположную точку с вероятностью  $1/2$ . Выписать матрицу вероятностей перехода и построить граф, соответствующий этой матрице.

№23.

Матрица перехода цепи Маркова за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Построить оргграф. За сколько шагов из 2-го состояния можно перейти в 3-е и в 4-е? Найти вероятности состояний на 2-м шаге, если вектор

начальных состояний есть  $\bar{P}(0) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

№24.

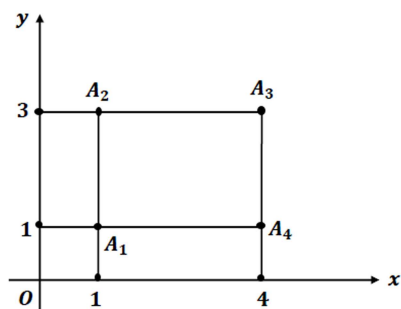
Система представляет собой вычислительный центр, в котором имеется три ЭВМ. В определенные моменты времени, разделенные промежутком  $\tau$ , все ЭВМ осматриваются, в результате чего каждая признается либо исправной и продолжает работать, либо признается неисправной и направляется в ремонт. Вероятность того, что исправная ЭВМ за время  $\tau$  выйдет из строя, не зависит от того, какое время она уже работала, и равна 0,2. Вероятность того, что ремонтируемая ЭВМ за время  $\tau$  будет приведена в исправность, не зависит от того, сколько времени уже продолжался ремонт и сколько ЭВМ ремонтируется, и равна 0,3. Процессы выхода ЭВМ из строя и их восстановлений протекают независимо друг от друга. Построить матрицу перехода, считая состояниями  $S_0$  — все три ЭВМ исправны;  $S_1$  — одна ЭВМ неисправна, остальные две работают;  $S_2$  — две ЭВМ неисправны, одна работает;  $S_3$  — все три ЭВМ неисправны.

№25.

Автомашина может находиться в одном из четырех состояний: исправна, неисправна, ремонтируется, списана. Если машина исправна, то с вероятностью 0,8 она может сломаться, если машина неисправна, то она с вероятностью 0,7 ремонтируется или с вероятностью 0,3 списывается; если же машина ремонтируется, то она с вероятностью 0,6 становится исправной, либо с вероятностью 0,4 продолжает ремонтироваться. Остальные переходы считать невозможными. Найти вероятность того, что машина будет исправна в субботу, если известно, что она была исправна в среду.

№26.

60% детей выпускников СибГУТИ учатся в СибГУТИ. 30% в других вузах и 10% в вузы не поступают. Дети, родители которых окончили другие вузы, учатся в СибГУТИ — 20%, в других вузах — 70%, нигде не учатся — 10%. Для детей, родители которых не имеют высшего образования, эти проценты соответственно, 10, 40, 50. Какова вероятность, что в СибГУТИ будут учиться: а) сын выпускника СибГУТИ; б) его внук.



№27.

Пусть "блоха" прыгает по точкам  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . С вероятностью 0,2 она может прыгнуть вправо, а с вероятностью 0,3 — влево; с вероятностью 0,4 — вверх, а с вероятностью 0,1 — вниз. Составить матрицы перехода за 1 шаг и за 2 шага.

№28.

В любой данный день человек здоров или болен. Если человек здоров сегодня, то вероятность того, что он будет здоров и завтра оценивается в 98%. Если человек сегодня болен, то завтра он будет здоров лишь в 30% случаев. Описать последовательность состояний здоровья как Марковскую цепь. Найти вероятность того, что человек выздоровеет завтра, послезавтра и на третий день, если сегодня он болен.

№29.

Матрица перехода цепи Маркова за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Чему равно число состояний? 2) Изобразить цепь Маркова с помощью орграфа. 3) Применима ли теорема Маркова? Если да, то чему равны финальные вероятности?

№30.

Матрица перехода цепи Маркова за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Применима ли теорема Маркова? Если да, то чему равны финальные вероятности?

№31.

Поведение рынка ценных бумаг обнаруживает следующую тенденцию: сделки, в которых цены возрастают, меняются сделками, в которых цены падают. Наблюдения показали, что вероятность возрас-

тания цен после периода их падения равна 0,65, а вероятность падения цен после предшествовавшего периода их возрастания равна 0,6. Считая, что смена периодов падения и возрастания цен происходит в моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ , и т.д., проанализируйте процесс функционирования рынка с помощью цепи Маркова, постройте оргграф и найдите вероятности падения и роста цен при длительном функционировании рынка.

№32.

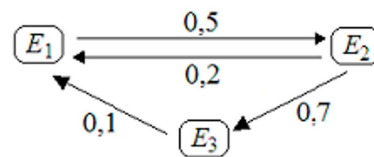
В городе  $N$  каждый житель имеет одну из трех профессий: А, В, С. Дети отцов, имеющих профессии А, В, С, сохраняют профессии отцов с вероятностями  $3/5, 2/3, 1/4$  соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти предельное распределение вероятностей по профессиям, когда число поколений растет.

№33.

Найти финальные вероятности для цепи Маркова из задачи №16.

№34.

Граф состояний марковской цепи изображен на рисунке (кроме переходов  $E_i \rightarrow E_i, i = \overline{1,3}$ ):



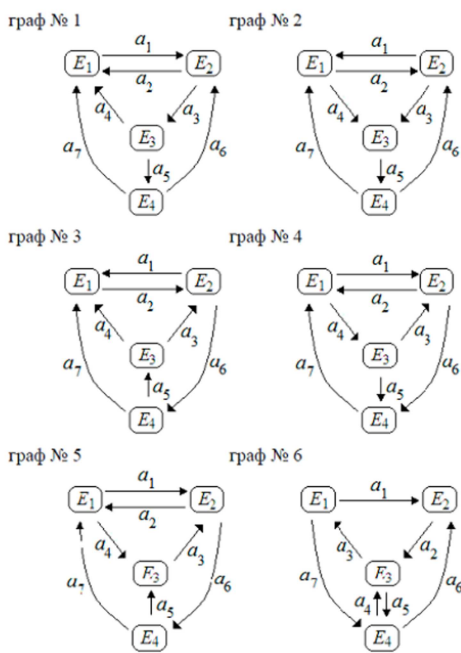
При начальном распределении  $P_1(0) = 1, P_2(0) = P_3(0) = 0$  найти наименее вероятное состояние на 3-м шаге. Вычислить финальные вероятности состояний цепи.

№35.

Матрица перехода цепи Маркова за один шаг имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычислить финальные вероятности.



№36.

По заданному графу состояний марковской цепи (не указаны переходы  $E_i \rightarrow E_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ ) написать переходную матрицу вероятностей. При начальном распределении  $P_1(0) = 1$ ,  $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$  найти наиболее вероятное состояние на третьем шаге. Найти финальные вероятности состояний цепи.

| № | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0,8   | 0,2   | 0,5   | 0,4   | 0,5   | 0,3   | 0,6   |
| 2 | 0,3   | 0,4   | 0,6   | 0,4   | 0,5   | 0,4   | 0,4   |
| 3 | 0,1   | 0,8   | 0,4   | 0,4   | 0,5   | 0,8   | 0,4   |
| 4 | 0,4   | 0,2   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,5   | 0,8   |
| 5 | 0,3   | 0,2   | 0,9   | 0,6   | 0,7   | 0,7   | 0,2   |
| 6 | 0,5   | 0,3   | 0,4   | 0,3   | 0,6   | 0,6   | 0,4   |

№37.

Рассмотрим состояния банка, характеризующиеся одной из процентных ставок: 5%, 6%, 7%, которые устанавливаются в начале каждого квартала и сохраняются неизменными на всем его протяжении. Предположим, что процесс, протекающий в системе, является стационарным. Пусть:

- вероятность того, что ставка повысится на один процент, равна 0.2;
- вероятность того, что ставка понизится на один процент, равна 0.3;
- вероятность того, что ставка повысится на два процента, равна 0.2;
- вероятность того, что ставка понизится на два процента, равна 0.1.

Требуется: 1) составить матрицу переходных вероятностей; 2) определить вероятности указанных состояний банка в конце года, если в конце предыдущего года процентная ставка банка составляла 5%; 3) найти предельные вероятности состояний.

## §6. Стационарные случайные процессы.

### Теоретические сведения

Важным классом случайных процессов являются стационарные процессы. Свойство стационарности означает независимость некоторых характеристик сечений процесса от времени. Конечно, для реальных процессов это условие весьма ограничительно, однако оно выполняется довольно часто, если рассматривать процесс на достаточно

коротком интервале времени, в течение которого вероятностные характеристики процесса изменяются мало.

Случайный процесс  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , называется *стационарным в узком смысле*, если для любых  $t_1, \dots, t_k, t_1 + u, \dots, t_k + u \in T$  совместное распределение величин  $\xi(t_1 + u), \dots, \xi(t_k + u)$  не зависит от  $u$ .

Для случайных процессов, стационарных в узком смысле, конечномерные распределения не меняются с течением времени.

Случайный процесс с конечными моментами 2-го порядка называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание постоянно, а ковариационная функция является функцией разности  $t - u$ , т.е.  $M\xi(t) = m$ ,  $r(t, u) = r^*(t - u)$ .

При этом справедливо утверждение: если стационарный в узком смысле СП имеет моменты 2-го порядка, то этот процесс будет стационарным и в широком смысле. Однако стационарный в широком смысле процесс может не быть стационарным в узком смысле.

#### Решение типовых примеров

**Пример:** Пусть  $\xi(\omega, t) = X \cos \lambda t + Y \sin \lambda t$ , где величины  $X$  и  $Y$  не коррелированы,  $\lambda$  — постоянная,  $MX = MY = 0$ ,  $DX = DY = 1$ . Этот процесс не будет стационарным в узком смысле, т.к. величины  $\xi(\omega, 0) = X$  и  $\xi(\omega, \frac{\pi}{2\lambda}) = Y$  распределены по разным законам.

$$\begin{aligned} r(t, u) &= M\xi(\omega, t)\xi(\omega, u) = M[X \cos \lambda t + Y \sin \lambda t][X \cos \lambda u + Y \sin \lambda u] = \\ &= M[X^2 \cos \lambda t \cos \lambda u + XY(\cos \lambda t \sin \lambda u + \sin \lambda t \cos \lambda u) + Y^2 \sin \lambda t \sin \lambda u] = \\ &= \cos \lambda t \cos \lambda u + \sin \lambda t \sin \lambda u = \cos \lambda(t - u). \end{aligned}$$

Отсюда и из  $M\xi(\omega, t) = 0$  следует, что процесс является стационарным в широком смысле.

#### Задачи

##### №1.

Выясните, является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\xi(\omega, t) = X \cos(at + Y)$ , где  $X$  и  $Y$  независимы,  $X$  имеет плотность вероятности  $f_X(x) = xe^{-x^2/2}$ ,  $x \geq 0$ , а  $Y$  распределена равномерно на  $[-\pi; \pi]$ .

##### №2.

Выясните, является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\xi(\omega, t) = \sin(Ut + V)$ , если случайные величины  $U$  и  $V$  независимы и распределены равномерно на отрезках  $[-A; A]$  и  $[-\pi; \pi]$  соответственно.

№3.

Выясните, является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\xi(\omega, t) = X \cos(t + Y)$ , где  $X$  и  $Y$  независимы,  $X$  имеет распределение  $N(0; 1)$ , а  $Y$  распределена равномерно на  $[-\pi; \pi]$ .

№4.

Пусть  $U$  и  $V$  — некоррелированные случайные величины. Доказать, что случайный процесс  $\xi(\omega, t)$  стационарен в широком смысле:

- 1)  $\xi(\omega, t) = (U - 2) \cos 3t - V \sin 3t$ ,  $U \in R(0; 4)$ ,  $V \in N(0; 2/\sqrt{3})$ ;
- 2)  $\xi(\omega, t) = (U + 2) \cos 2t - V \sin 2t$ ,  $U \in N(-2; 2)$ ,  $V \in R(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ ;
- 3)  $\xi(\omega, t) = U \cos 5t - (V - 5) \sin 5t$ ,  $U \in R(-4; 4)$ ,  $V \in N(5; 4/\sqrt{3})$ ;
- 4)  $\xi(\omega, t) = (U - 5) \cos 3t - V \sin 3t$ ,  $U \in E(0.2)$ ,  $V \in N(0; 5)$ ;
- 5)  $\xi(\omega, t) = U \cos 6t - (V - 4) \sin 6t$ ,  $U \in R(-2; 2)$ ,  $V \in R(2; 6)$ ;
- 6)  $\xi(\omega, t) = (U - 2) \cos 10t - (V - 2) \sin 10t$ ,  $U \in E(0.5)$ ,  $V \in E(0.5)$ .

№5.

Какие из следующих случайных процессов являются стационарными в широком смысле:

- 1)  $\xi(\omega, t) = V \sin t$ ,  $V \in N(2; 4)$ ;
- 2)  $\xi(\omega, t) = \sin(t + \varphi)$ ,  $\varphi \in R[0; 2\pi]$ ,  $t \geq 0$ ;
- 3)  $\xi(\omega, t) = Y \cos 3t$ ,  $Y$  — случайная величина.

№6.

Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\xi(\omega, t) = t^3 U$ , где  $U$  — случайная величина, причем: а)  $MU \neq 0$ ; б)  $MU = 0$ ?

№7.

Является ли стационарным в широком смысле случайный процесс  $\xi(\omega, t) = \sin(Xt)$ , если случайная величина  $X$  распределена равномерно на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ?

№8.

Будет ли стационарным в узком смысле процесс  $\xi(\omega, t) = U$ , где  $U$  — случайная величина?

№9.

Пусть  $\eta$  — случайная величина с плотностью вероятности  $f(y) = \cos y$ ,  $y \in [0; \frac{\pi}{2}]$ . Будет ли процесс  $\xi(\omega, t) = a \sin(bt + \eta)$ , где  $a$  и  $b$  — положительные постоянные, стационарным в широком смысле?

## §7. Процессы гибели и размножения.

### Теоретические сведения

Пусть система может находиться в одном из состояний  $E_0, E_1, \dots$ . Изменения системы описывает случайный процесс  $\xi(t)$ , значениями которого являются номера состояний системы  $i = 0, 1, 2, \dots$ . За промежуток времени от  $t$  до  $t + h$  система из состояния  $E_i$  может перейти в состояние  $E_{i+1}$  с вероятностью  $\mu_i h + o(h)$  и в состояние  $E_{i-1}$  с вероятностью  $\nu_i h + o(h)$ . При этом вероятность перехода системы хотя бы в одно из состояний  $E_{i \pm k}$  при  $k > 1$  бесконечно мала по сравнению с  $h$ . Постоянные  $\mu_i$  и  $\nu_i$  не зависят от  $t$  и от того, каким путем система пришла в состояние  $E_i$ . Такой процесс называется *процессом гибели и размножения*. Если  $\forall i \geq 0 \nu_i = 0$ , то процесс — чистого размножения (возможны только переходы  $E_i \rightarrow E_{i+k}$ ,  $k > 0$ ), а если  $\forall i \geq 0 \mu_i = 0$ , то процесс — процесс гибели.

Пусть  $p_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$  — вероятность того, что в момент времени  $t$  система находится в состоянии  $E_k$ . Эти вероятности удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\mu_0 p_0(t) + \nu_1 p_1(t), \\ p'_k(t) = -(\mu_k + \nu_k) p_k(t) + p_{k-1}(t) \mu_{k-1} + p_{k+1}(t) \nu_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

Начальные условия зависят от того, в каком состоянии система находилась в момент  $t = 0$ . Если начальное состояние было  $E_0$ , то  $p_0(0) = 1$ ,  $p_k(0) = 0$ ,  $k \geq 1$ .

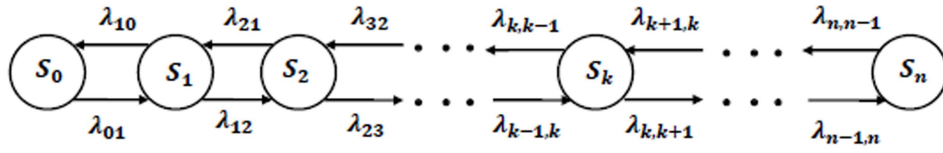
Для процесса чистого размножения, т.е. при  $\nu_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$  решениями системы (1) являются функции

$$p_j(t) = (-1)^j \prod_{i=0}^{j-1} \mu_i \sum_{i=0}^{j-1} \frac{e^{-\mu_i t} - e^{-\mu_j t}}{\prod_{k \neq i} (\mu_i - \mu_k)}.$$

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы  $S_0, S_1, \dots, S_n$ . Пусть переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния  $S_k$  возможны переходы либо в состояние  $S_{k-1}$ , либо в состояние  $S_{k+1}$ .

Будем считать, что все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, являются простейшими с соответствующими интенсивностями  $\lambda_{k,k-1}$  или  $\lambda_{k-1,k}$ .

Граф состояний процесса гибели и размножения имеет вид



Предельные вероятности состояний вычисляются по формулам:

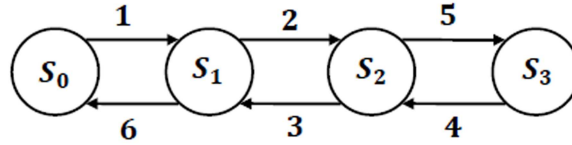
$$p_0 = \left( 1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{10}\lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{10}\lambda_{21} \dots \lambda_{n,n-1}} \right)^{-1}; \quad p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0;$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{10}\lambda_{21}} p_0; \quad \dots \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{10}\lambda_{21} \dots \lambda_{n,n-1}} p_0.$$

Числители этих коэффициентов представляют собой произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо от  $S_0$  до данного состояния  $S_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ), а знаменатели — произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево от состояния  $S_k$  до состояния  $S_0$ .

#### Решение типовых примеров

**Пример:** Найти предельные вероятности для процесса, граф которой изображен на рисунке:



Двигаемся по этому графу слева направо. Вероятность  $p_0$  — предельная вероятность состояния  $S_0$ .

Следующее состояние —  $S_1$ . Оно связано с состоянием  $S_0$  двумя стрелками с интенсивностями 1 и 6. Пусть  $p_1$  — предельная вероятность состояния  $S_1$ . Имеем  $p_1 = \frac{1}{6}p_0$  (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, интенсивность нижней стрелки пишем в знаменателе).

Следующее состояние  $S_2$ . Оно связано с состоянием  $S_1$  двумя стрелками с интенсивностями 2 и 3. Пусть  $p_2$  — предельная вероятность состояния  $S_2$ . Имеем (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, нижней стрелки — в знаменателе):  $p_2 = \frac{2}{3}p_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}p_0 = \frac{1}{9}p_0$ .

Следующее состояние  $S_3$ . Оно связано с состоянием  $S_2$  двумя стрелками с интенсивностями 5 и 4. Пусть  $p_3$  — предельная вероятность состояния  $S_3$ . Имеем (интенсивность верхней стрелки пишем в числителе, нижней стрелки — в знаменателе):  $p_3 = \frac{5}{4}p_2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{9}p_0 = \frac{5}{36}p_0$ .

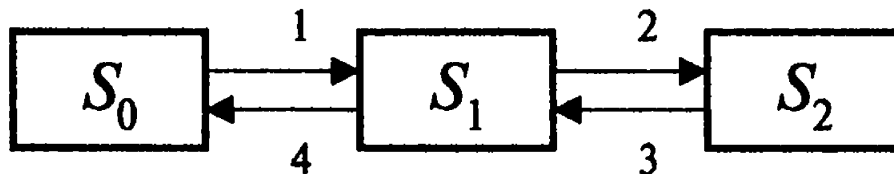
Так как  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ , то  $1 = p_0 + \frac{1}{6}p_0 + \frac{1}{9}p_0 + \frac{5}{36}p_0 = \frac{51}{36}p_0$ .  
Отсюда  $p_0 = \frac{36}{51}$ .

Тогда  $p_1 = \frac{1}{6}p_0 = \frac{6}{51}$ ,  $p_2 = \frac{1}{9}p_0 = \frac{4}{51}$ ,  $p_3 = \frac{5}{36}p_0 = \frac{5}{51}$ .

### Задачи

#### №1.

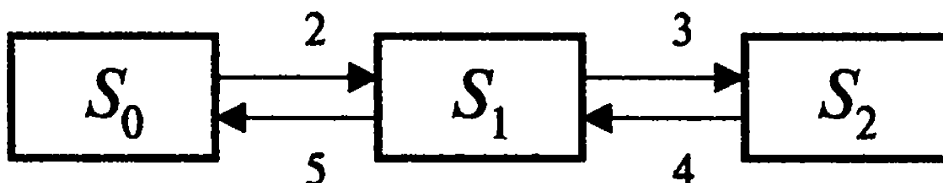
Процесс гибели и размножения представлен графом



Найти предельные вероятности состояний.

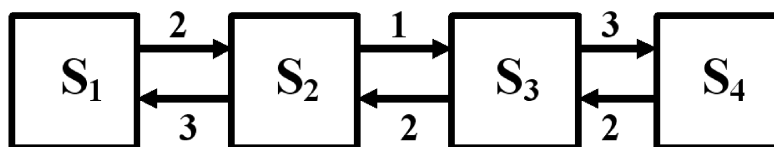
#### №2.

Найти предельные вероятности для системы S, граф которой изображен на рисунке:



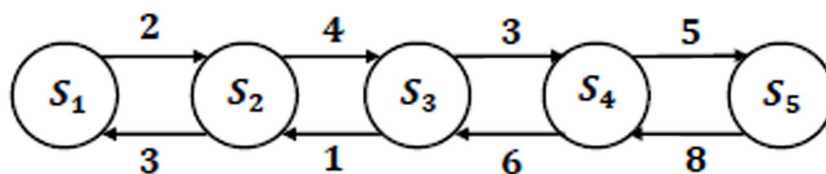
#### №3.

Найти предельные вероятности для системы S, граф которой изображен на рисунке:



#### №4.

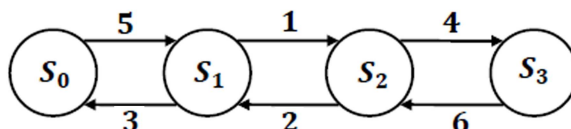
Данные, полученные при исследовании рынка ценных бумаг, показали, что рыночная цена одной акции некоторого акционерного общества может колебаться в пределах от 1000 до 2000 руб. включительно. Рассматривая в качестве системы одну такую акцию, нас будут интересовать следующие ее пять состояний, характеризующихся рыночной ценой акции:  $S_1$  – от 1000 до 1200 руб.;  $S_2$  – от 1200 до 1400 руб.;  $S_3$  – от 1400 до 1600 руб.;  $S_4$  – от 1600 до 1800 руб.;  $S_5$  – от 1800 до 2000 руб. включительно. Замечено, что рыночная цена в будущем зависит в основном от ее цены в текущий момент времени. Граф состояний системы имеет вид



Требуется спрогнозировать рыночную цену акции на будущее. Стоит ли приобретать акции по цене 1700 руб.?

№5.

Найти предельные вероятности для процесса гибели и размножения, граф которой изображен на рисунке:



## §8. Процессы массового обслуживания.

### Теоретические сведения

Системы, предназначенные для многоразового использования при решении однотипных задач называют *системами массового обслуживания (СМО)*.

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц, которые называются *каналами обслуживания*.

*Потоком событий* называется последовательность одинаковых событий, происходящих одно за другим через промежутки времени случайной длины.

СМО делят на два основных типа: СМО с отказами и СМО с очередью.

В *СМО с отказами* заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует. В *СМО с очередью* заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным числом мест в ней, называются *системами с ограниченной длиной очереди*.

Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания в ней каждой заявки, называются *системами с ограниченным временем ожидания*.

Если источник поступления требований находится вне СМО, то такая система называется *разомкнутой системой*, если же он находится внутри самой системы, то система называется *замкнутой*.

Рассмотрим систему с состояниями  $E_0, E_1, \dots, E_n$ , где состояние  $E_k$  означает, что занято  $k$  каналов, а переходы из одного состояния в другое описываются по схеме процесса гибели и размножения  $\xi(t)$  с параметрами  $\mu_k = \lambda, 1 \leq k \leq n-1, \mu_n = 0$  и  $\nu_k = k\nu, 1 \leq k \leq n$ .

Обозначим  $p_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$  — вероятность того, что в момент времени  $t$  система находится в состоянии  $E_k$ , и будем искать вероятности  $p_k(t)$  для *установившегося режима*, который характеризуется значениями вероятностей  $p_k(t)$  при больших значениях времени  $t$ . Их приближенные значения равны пределам  $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t), k = \overline{0, n}$ . Их

вычисляют по формулам Эрланга  $p_k = \frac{\rho^k}{k!} \left[ \sum_{j=0}^n \frac{\rho^j}{j!} \right]^{-1}, (2) k = \overline{0, n},$

где  $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ .

Здесь  $\lambda$  — среднее число заявок за единицу времени, называемое *интенсивностью потока заявок*, а время ожидания (время обслуживания одной заявки) имеет показательное распределение с параметром  $\nu$ . Величина  $\nu = \frac{1}{m_{об}}$  называется *интенсивностью обслуживания*, а  $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$  — *загрузкой системы*.

Для характеристики работы СМО используют следующие параметры:

1) *Относительной пропускной способностью системы* называют число  $q$ , равное отношению среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступивших за это время заявок.

2) *Абсолютной пропускной способностью системы* называется число  $Q$ , равное среднему числу заявок, которые система может обслужить за единицу времени.

3) Число  $K_{ср} = M\xi(t)$  называют *средним числом занятых каналов*.

4) Математическое ожидание времени обслуживания поступившей заявки называют *средним временем пребывания заявки в системе обслуживания* и обозначают  $t_{ср}$ .

Обозначим вероятность отказа —  $P_{отк}$ , среднее число заявок в СМО (обслуживаемых или ожидающих в очереди) —  $\bar{z}$ , среднее число заявок в очереди —  $\bar{r}$ , среднее время пребывания заявки в очереди —

$\overline{t_{\text{оч}}}$ .

**Простейшая СМО с отказами.**

$$p_0 = \left( \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad k = \overline{1, n},$$

$$q = 1 - p_n, \quad Q = \lambda q, \quad P_{\text{отк}} = p_n, \quad K_{\text{ср}} = \rho q, \quad t_{\text{ср}} = \frac{K_{\text{ср}}}{\lambda}.$$

**Одноканальная СМО с неограниченной очередью.**

$$p_0 = 1 - \rho, \quad p_k = \rho^k (1 - \rho), \quad q = 1, \quad P_{\text{отк}} = 0,$$

$$Q = \lambda, \quad \bar{z} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad \bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}, \quad t_{\text{ср}} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)},$$

$$\overline{t_{\text{оч}}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}, \quad K_{\text{ср}} = \rho.$$

**Одноканальная СМО с ограничением по длине очереди.**

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}, \quad p_k = \rho^k p_0, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad q = 1 - p_{m+1},$$

$$Q = \lambda(1 - p_{m+1}); \quad P_{\text{отк}} = p_{m+1}; \quad K_{\text{ср}} = 1 - p_0;$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1 - \rho^m(m+1 - m\rho))}{(1 - \rho)(1 - \rho^{m+2})}; \quad \bar{z} = \bar{r} + K_{\text{ср}}; \quad t_{\text{ср}} = \frac{\bar{z}}{\lambda}; \quad \overline{t_{\text{оч}}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

**Многоканальная СМО с неограниченной очередью.**

Пусть число заявок в очереди равно  $r$ .

$$\chi = \frac{\rho}{n}; \quad p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1}{1 - \chi}}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \quad r \geq 1; \quad \bar{r} = \frac{\chi p_n}{(1 - \chi)^2}; \quad \bar{z} = \bar{r} + K_{\text{ср}} = \bar{r} + \rho;$$

$$t_{\text{ср}} = \frac{\bar{z}}{\lambda}; \quad \overline{t_{\text{оч}}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

## Многоканальная СМО с ограниченной очередью.

$$\chi = \frac{\rho}{n}; \quad p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \chi^m}{1 - \chi}}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \quad 1 \leq r \leq m; \quad q = 1 - p_{n+m}; \quad Q = \lambda(1 - p_{n+m});$$

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m}; \quad K_{\text{ср}} = \rho(1 - p_{n+m}); \quad \bar{z} = \bar{r} + K_{\text{ср}}; \quad t_{\text{ср}} = \frac{\bar{z}}{\lambda};$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (m+1)\chi^m + m\chi^{m+1}}{(1 - \chi)^2}; \quad \overline{t_{\text{оч}}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

### Решение типовых примеров

**Пример 1.** Автоматическая телефонная станция имеет 4 канала связи. На станцию поступает пуассоновский поток заявок интенсивностью  $\lambda = 3$ . Средняя продолжительность разговора составляет две минуты. Найти: 1) вероятность того, что в момент поступления очередной заявки будут заняты ровно три канала; 2) вероятность того, что поступившая заявка получит отказ.

$m_{\text{об}} = 2 \Rightarrow \nu = \frac{1}{2}; \rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{3}{0,5} = 6$ . Нужно вычислить: 1)  $p_3$ ; 2)  $p_4$ .

$$\text{Из (2) } p_0 = \left[ \sum_{j=0}^4 \frac{\rho^j}{j!} \right]^{-1}, \quad p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0, \quad p_4 = \frac{\rho^4}{4!} p_0.$$

$$\text{I способ. } p_0 = \frac{1}{1 + 6 + \frac{36}{2} + \frac{216}{6} + \frac{1296}{24}} = \frac{1}{7 + 18 + 36 + 54} = \frac{1}{115};$$

$$p_3 = \frac{6^3}{6} \cdot \frac{1}{115} = \frac{36}{115} \approx 0,313; \quad p_4 = \frac{6^4}{24} \cdot \frac{1}{115} = \frac{54}{115} \approx 0,4696.$$

II способ. Обозначим  $p(m, \rho) = e^{-\rho} \frac{\rho^m}{m!}$ . Умножим числитель и знаменатель (4) на  $e^{-\rho}$ . Получим  $p_k = \frac{p(k, \rho)}{\sum_{i=0}^n p(i, \rho)}$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

По таблице распределения Пуассона найдем  $p(k, 6)$ ,  $k = \overline{0, 4}$  и получим  $p_3 = \frac{0,089235}{0,285058} \approx 0,313$ ;  $p_4 = \frac{0,133853}{0,285058} \approx 0,4696$ .

**Пример 2.** Найти по данным предпоследнего примера относительную и абсолютную пропускную способность телефонной станции,

среднее число занятых телефонных линий и среднее время пребывания заявки на телефонной станции.

$$q = 1 - p_4 = 1 - 0,4696 = 0,5304,$$

$$Q = 3 \cdot 0,5304 = 1,5912,$$

$$K_{\text{ср}} = 6 \cdot 0,5304 = 3,1824,$$

$$t_{\text{ср}} = \frac{3,1824}{3} = 1,0608.$$

### Задачи

#### №1.

СМО с отказами представляет собой двухканальную телефонную линию, на вход которой поступает поток вызовов с интенсивностью 1,5 вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора 2 минуты. Найти предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания СМО.

#### №2.

На вход одноканальной СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ ; время обслуживания – показательное с параметром  $\mu$ . В начальный момент времени  $t = 0$  канал свободен. Построить размеченный граф состояний СМО. Написать и решить дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний СМО. Найти финальные вероятности состояний и (для установившегося режима) характеристики эффективности СМО.

#### №3.

Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток вызовов с интенсивностью  $\lambda = 0,4$  вызовов/мин. Средняя продолжительность разговора  $m_{\text{об}} = 3$  мин; время разговора имеет показательное распределение. Найти финальные вероятности состояний СМО и показатели ее эффективности.

#### №4.

На автозаправочной станции установлено 3 колонки для отпуска бензина. Около станции имеется площадка для ожидания машин в очереди, на которой одновременно могут находиться не более трех автомашин. На станцию прибывают в среднем три автомашины в минуту. Среднее время заправки одной автомашины 2 мин. Предполагая входящий поток требований простейшим, а время обслуживания - распределенным по показательному закону, определить показатели эффективности работы автозаправочной станции, как СМО.

№5.

Железнодорожная сортировочная горка, на которую подается простейший поток составов с интенсивностью  $\lambda = 2$  состава в час, представляет собой одноканальную СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания (ропуска) состава на горке имеет показательное распределение со средним значением 20 мин. Найти финальные вероятности состояний СМО, среднее число  $\bar{z}$  составов, связанных с горкой, среднее число  $\bar{r}$  составов в очереди, среднее время пребывания состава в СМО, среднее время пребывания состава в очереди.

№6.

Для простейшей двухканальной СМО с тремя местами в очереди при  $\lambda = 0,6$  и  $\nu = 0,2$  найти финальные вероятности состояний и вычислить  $\bar{z}$ ,  $\bar{r}$ , среднее время пребывания заявки в СМО и среднее время пребывания заявки в очереди.

№7.

Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью  $\lambda = 4$  заявки/ч. Среднее время обслуживания одной заявки 0,8 ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход  $c = 4$  руб. Содержание каждого канала обходится 2 руб/ч. Решить: выгодно или невыгодно в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех?

№8.

В стоматологическом кабинете три кресла, а в коридоре имеются три стула для ожидающих приема. Поток клиентов - простейший с интенсивностью 12 клиент/ч. Время обслуживания (приема клиента) - показательное со средним значением 20 мин. Если все три стула в коридоре заняты, клиент в очередь не становится. Определить среднее число клиентов, обслуживаемых за час, среднюю долю обслуженных клиентов из числа пришедших, среднее число занятых стульев в коридоре, среднее время, которое клиент проведет в коридоре и в кабинете.

№9.

Подсчитать характеристики эффективности для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди при условиях:  $\lambda = 4$  заявки/ч;  $m_{об} = 0,5$ . Выяснить, как эти характеристики изменяются, если увеличить число мест в очереди до 4.

№10.

Система массового обслуживания - билетная касса с одним окошком и неограниченной очередью. В кассе продаются билеты в пункты

А и В; пассажиров, желающих купить билет в пункт А, приходит в среднем трое за 20 мин, в пункт В - двое за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания - показательное. Установить, существуют ли финальные вероятности состояний СМО и если да - вычислить первые три из них и найти характеристики эффективности СМО.

#### №11.

Железнодорожная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются билеты в два пункта: Ленинград и Киев. Потоки пассажиров, приобретающих билеты в Ленинград и в Киев, одинаковы по интенсивности, которая равна 0,45 пасс/мин. Среднее время обслуживания пассажира (продажи ему билета) – 2 мин. Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Ленинград, а во второй – только в Киев. Считая в первом приближении все потоки событий простейшими, проверить разумность этого предложения.

#### №12.

Имеется простейшая трехканальная СМО с отказами; на нее поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки/мин; время обслуживания заявки одним каналом 0,5 мин. Спрашивается, выгодно ли с точки зрения пропускной способности СМО заставить все три канала обслуживать заявки сразу?

#### №13.

Имеется простейшая трехканальная СМО с неограниченной очередью. Интенсивность потока заявок 4 заявки/ч; среднее время обслуживания 0,5 ч. Выгодно ли, имея в виду: 1) среднюю длину очереди, 2) среднее время пребывания заявки в очереди, 3) среднее время пребывания заявки в СМО, объединить все три канала в один, с вдвое меньшим средним временем обслуживания?

#### №14.

Рассматривается работа автоматической телефонной станции, рассчитанной на одновременное обслуживание 20 абонентов. Вызов на АТС поступает в среднем через 6 секунд. Каждый разговор длится в среднем 2 минуты. Если абонент застает АТС занятой, то получает отказ. Если абонент застает свободным хотя бы один из 20 каналов, то он соединяется с нужным ему номером. Определить вероятность того, что абонент, вызвав АТС, не застанет ее занятой, а также абсолютную

пропускную способность АТС и среднее число занятых каналов.

№15.

Известно, что заявки на телефонные переговоры в телевизионном ателье поступают с интенсивностью, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону 2 мин. Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

№16.

Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с одним каналом (одной группой проведения осмотра). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в среднем 36 машин в сутки. Потоки заявок и обслуживании - простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

№17.

Решить предыдущую задачу для случая 4 групп проведения осмотра.

№18.

На вход трехканальной системы с неограниченным временем ожидания поступает простейший поток заявок с плотностью 4 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки 30 мин. Найти вероятности  $p_0, p_1, p_2, p_3$ , вероятность наличия очереди и среднюю длину очереди.

№19.

На станцию текущего ремонта автомашин поступает простейший поток заявок с плотностью 0,5 машины в час. Имеется одно помещение для ремонта. Во дворе станции могут одновременно находиться, ожидая очереди, не более трех машин. Среднее время ремонта одной машины 4 часа. Определить относительную и абсолютную пропускную способность системы.

№20.

Парикмахерская имеет трех мастеров, каждый из которых в среднем на обслуживание одного клиента тратит 10 мин. Клиенты образуют простейший поток со средним числом поступлений 12 человек в час. Клиенты становятся в очередь, если к моменту их прихода в очереди менее трех человек, в противном случае они покидают парик-

махерскую. Определить: 1) вероятность отсутствия клиентов в парикмахерской; 2) вероятность того, что клиент покинет парикмахерскую необслуженным; 3) вероятность того, что все мастера будут заняты работой; 4) среднее число клиентов в очереди; 5) среднее число клиентов в парикмахерской вообще.

№21.

На вход системы обслуживания поступает простейший поток заявок с плотностью 4 заявки в час. Время обслуживания распределено по показательному закону, причем среднее время обслуживания одной заявки 15 мин. Вычислить количество необходимых обслуживающих аппаратов, чтобы вероятность отказа в обслуживании заявки не превышала 0,01.

№22.

На многоканальный контактный телефон фирмы поступает простейший поток звонков интенсивностью 5 звонков в час. Время разговора с каждым клиентом в среднем занимает 10 минут. Звонки, заставшие все каналы занятыми, теряются. Сколько должно быть каналов, чтобы терялось не более 10% звонков?

№23.

На вокзале, в мастерской бытового обслуживания работают 3 мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 час, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин. Определить основные характеристики эффективности функционирования данной мастерской в предельном режиме:

- 1) вероятность того, что клиент получит отказ;
- 2) вероятность того, что клиент будет обслужен;
- 3) среднее число клиентов, обслуживаемых мастерской в течение 1 часа;
- 4) среднее число занятых мастеров.

№24.

Платная стоянка для автомашин имеет 7 мест, машины пребывают в среднем через 20 мин. И занимают место в среднем 1 час. Очереди не допускается. Считая все потоки простейшими, определить показатели эффективности работы такой СМО.

№25.

Автозаправочная станция имеет 4 бензоколонки. Среднее время заправки — 2 мин. Входящий поток автомашин — простейший с ин-

тенсивностью 1,5 авт./мин. При всех занятых колонках требование теряется. Определить вероятность отказа и среднее число занятых колонок.

## Ответы и указания

### §1. Понятие случайного процесса. Сечение, траектория. Семейство конечномерных распределений. Случайная последовательность. Эквивалентные процессы.

$$\text{№1} \quad f(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists x_i < 0, \\ 2^n e^{-2 \sum_{i=1}^n x_i}, & \text{если } \forall x_i \geq 0. \end{cases}$$

№2  $p(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \dots x_n!}$ . №3  $F(t, x) = F(x - t)$ ,  $t \in [0; \infty)$ . №5 Сечения:  $\xi(\omega, t_0) \in R(0; t_0)$ . Траектории процесса — отрезки прямых, выходящие из точки  $(0; 0)$  с угловым коэффициентом  $\omega_0$ .

№6  $F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = F_U \left( \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{\varphi(t_i)} \right)$ . №7  $\approx 0,997$ .

№8 0,5. №9 0,25. №10 0,5. №11 1)  $F(t, x) = F(\frac{x-5}{2t})$ ; 2)  $F(t, x) = F(\frac{x-1}{3} - t)$ ; 3)  $F(t, x) = \begin{cases} F(2t + \operatorname{tg} x), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ ; 4)  $F(t, x) =$

$\begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 1 - F(\ln \frac{x}{t}), & x < 0 \end{cases}$ . №13 1)  $p(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{-\sum_{i=1}^n x_i}$ ;

2)  $f(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \exists x_i \notin [-\pi; \pi], \\ \frac{1}{(2\pi)^n}, & \forall x_i \in [-\pi; \pi] \end{cases}$ ; 3)  $f(t_1, \dots, t_n,$

$x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(5\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{50} \sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2}$ . №14 Сечения:  $\xi(\omega, t_0) \in R[4 - t_0; 4]$ .

Траектории процесса — отрезки прямых, проходящие через точку  $(0; 4)$  с угловым коэффициентом  $(-X(\omega_0))$ . №15

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $S$ | 1   | 2   | 3   |
| $P$ | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

№16  $F(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2t^2}, & 0 < x \leq 2t^2, \\ 1, & x \geq 2t^2 \end{cases}$ ;  $f(t, x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 2t^2], \\ \frac{1}{2t^2}, & x \in [0; 2t^2] \end{cases}$ .

№17

|                    |               |               |               |               |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\xi(\omega, t_0)$ | $-2t_0^2$     | $-t_0^2$      | $t_0^2$       | $2t_0^2$      |
| $P$                | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

№19 0,25.

№20  $F(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - x^{-\frac{\lambda}{t}}, & x \geq 1 \end{cases}$ ;  $f(t, x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{\lambda}{t} x^{-\frac{\lambda}{t}-1}, & x \geq 1 \end{cases}$ .

## §2. Математическое ожидание, дисперсия и ковариационная функция.

**№1**  $m(t) = X \sin at$ ,  $r(t, u) = 0,2 \sin at \sin au$ . **№2**  $m(t) = 2e^{-t^2}$ ,  $D(t) = 0,01e^{-2t^2}$ ,  $r(t, u) = 0,01e^{-t^2-u^2}$ . **№3**  $m(t) = 0,5t+0,5t^2$ ,  $r(t, \tau) = t\tau + 0,05t^2\tau^2$ . **№4**  $m(t) = me^{-t}$ ,  $D(t) = \sigma^2 e^{-2t}$ ,  $r(t, u) = \sigma^2 e^{-t-u}$ ,  $\bar{r}(t, u) = 1$ . **№5**  $m(t) = am + t$ ,  $D(t) = a^2 \sigma^2$ ,  $r(t, u) = a^2 \sigma^2$ ,  $\bar{r}(t, u) = 1$ . **№6**  $m(t) = \frac{\alpha+\beta}{2}t + a$ ,  $D(t) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}t^2$ ,  $r(t, u) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}tu$ ,  $\bar{r}(t, u) = 1$ . **№7**  $m(t) = m \frac{1-e^{-at}}{at}$ ,  $D(t) = (\sigma^2 + m^2) \frac{1-e^{-2at}}{2at} - \frac{m^2(1-e^{-at})^2}{a^2 t^2}$ ,  $r(t, \tau) = (\sigma^2 + m^2) \frac{1-e^{-a(t+\tau)}}{a(t+\tau)} - \frac{m^2(1-e^{-at})(1-e^{-a\tau})}{a^2 t\tau}$ . **№8**  $m(t) = \sin kt + 6t^2 + 5$ ,  $D(t) = 0,1 \sin^2 kt - 1,8t^2 \sin kt + 8,1t^4$ ,  $r(t, \tau) = 0,1 \sin kt \sin k\tau - 0,9t^2 \sin k\tau - 0,9\tau^2 \sin kt + 8,1t^2\tau^2$ . **№9**  $m(t) = 0$ ,  $D(t) = 0,5t^2(1+t^2)$ ,  $r(t, u) = 0,5tu(1+tu)$ . **№10**  $m(t) = 0$ ,  $D(t) = 0,5 + \sigma^2$ ,  $r(t, u) = 0,5 \cos A(t-u) + \sigma^2$ . **№11**  $m(t) = 0$ ,  $r(t, z) = De^{-\alpha|t+z|}$ . **№12**  $m(t) = \frac{1}{2(1+t^2)}$ ,  $D(t) = \frac{1}{2(1+t^2)^2}$ . **№13**  $m(t) = 0$ ,  $D(t) = \frac{A^2}{6} + \frac{A^2 \sin 2Bt}{12Bt}$ . **№14**  $m(t) = 0$ ,  $D(t) = e^{2iat} + e^{-2iat}$ ,  $r(t, u) = e^{ia(t+u)} + e^{-ia(t+u)}$ . **№15**  $m(t) = 0$ ,  $D(t) = \frac{A^2}{6}$ ,  $r(t, u) = \frac{A^2}{6} \cos a(t-u)$ . **№16**  $m(t) = 0$ ,  $D(t) = 1$ . **№17** 1)  $m(t) = 3t^2 + 2 \cos t - \sin t$ ,  $D(t) = 4t^4 + \frac{1}{4} \cos^2 t$ ,  $r(t, \tau) = 4t^2\tau^2 + \frac{1}{4} \cos t \cos \tau$ ; 2)  $m(t) = t^3 - \frac{5}{2} \cos t - 2$ ,  $D(t) = \frac{4}{3}t^6 + \frac{25}{4} \cos^2 t$ ,  $r(t, \tau) = \frac{4}{3}t^3\tau^3 + \frac{25}{4} \cos t \cos \tau$ ; 3)  $m(t) = \cos 3t + \sin t - t$ ,  $D(t) = \frac{4}{3} \cos^2 3t + 0,25 \sin^2 t$ ,  $r(t, \tau) = \frac{4}{3} \cos 3t \cos 3\tau + 0,25 \sin t \sin \tau$ ; 4)  $m(t) = -2e^t - 0,25 \sin t + t$ ,  $D(t) = 4e^{2t} + \frac{1}{16} \sin^2 t$ ,  $r(t, \tau) = 4e^{t+\tau} + \frac{1}{16} \sin t \sin \tau$ ; 5)  $m(t) = t^2 + e^{-2t} - 2t$ ,  $D(t) = 0,49e^{-4t} + 4t^2$ ,  $r(t, \tau) = 0,49e^{-2(t+\tau)} + 4t\tau$ ; 6)  $m(t) = 4,5t - 2 \sin t + 4t^2$ ,  $D(t) = 0,75t^2 + 9 \sin^2 t$ ,  $r(t, \tau) = 0,75t\tau + 9 \sin t \sin \tau$ ; 7)  $m(t) = 5t - 6t^2 - 5e^{2t}$ ,  $D(t) = 20,25t^4 + 25e^{4t}$ ,  $r(t, \tau) = 20,25t^2\tau^2 + 25e^{2(t+\tau)}$ ; 8)  $m(t) = e^{-t} + 4 \cos t + 3t$ ,  $D(t) = 16 \cos^2 t + \frac{4}{3}t^2$ ,  $r(t, \tau) = 16 \cos t \cos \tau + \frac{4}{3}t\tau$ .

## §4. Процесс Пуассона.

|           |                    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |    |
|-----------|--------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| <b>№1</b> | Число частиц       | 0  | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8  | 9  | 10 |
|           | Теор. число опытов | 50 | 196 | 383 | 499 | 488 | 382 | 249 | 139 | 68 | 30 | 12 |
|           |                    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |    |

**№2** 1) 0,0907; 2) 0,2177; 3) 0,9093. **№3** а) 0,133853; б) 0,997521; в) 0,002479. **№4** 1) 0,139587; 2) 0,313374; 3) 0,686626; 4) 0,000335;

5) 0,982; 6) 0,4353; 7) 0,5647. **№5** 1) 0,092; 2) 0,0996; 3) 0,9004; 4) 0,018;  
 5) 0,865; 6) 0,6811; 7) 0,318907. **№6** 1) 0,138; 2) 0,606; 3) 0,394; 4) 0,003;  
 5) 0,950213; 6) 0,33; 7) 0,67. **№7** 1) 0,174; 2) 0,384; 3) 0,616; 4) 0,069;  
 5) 0,9996; 6) 0,632; 7) 0,368. **№8** 0,001148. **№9** 0,1; 0,27. **№10** а) 0,2231;  
 б) 0,01412; в) 0,7769.

## §5. Цепи Маркова. Матрицы перехода. Уравнение Маркова. Финальные вероятности.

**№1**  $p_1(3) = 0,027, p_2(3) = 0,076, p_3(3) = 0,217, p_4(3) = 0,68.$

**№2** 0,6941. **№3**  $P = \begin{pmatrix} 0,216 & 0,432 & 0,288 & 0,064 \\ 0 & 0,36 & 0,48 & 0,16 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p_0(3) \approx 0,01,$

$p_1(3) \approx 0,11, p_2(3) \approx 0,398, p_3(3) \approx 0,482.$  **№4**  $p_0(1) = 0,5, p_1(1) = 0,3, p_2(1) = 0,2, p_3(1) = 0, p_0(2) = 0,25, p_1(2) = 0,27, p_2(2) = 0,28,$   
 $p_3(2) = 0,2, p_0(3) = 0,125, p_1(3) = 0,183, p_2(3) = 0,242, p_3(3) = 0,45.$

**№5**  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**№6**  $P(2) = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,16 & 0,38 \\ 0,47 & 0,27 & 0,26 \\ 0,31 & 0,46 & 0,23 \end{pmatrix}, P(3) = \begin{pmatrix} 0,386 & 0,286 & 0,238 \\ 0,357 & 0,362 & 0,281 \\ 0,361 & 0,301 & 0,338 \end{pmatrix}.$

**№7** а) 3; б)  $P(3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$  **№8** 0,202; 0,4015; 0,3965. **№9** 5%.

**№10** 0,17; 0,456; 0,245; 0,129. **№11**  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{P}(0) =$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \bar{P}(1) = \begin{pmatrix} \frac{11}{24} \\ \frac{5}{24} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{7}{24} \end{pmatrix}, \bar{P}(2) = \begin{pmatrix} \frac{91}{144} \\ \frac{5}{144} \\ \frac{5}{144} \\ \frac{43}{144} \end{pmatrix}.$  **№12**  $\bar{P}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\overline{P}(2) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,4 \end{pmatrix}. \text{ №13 } 1) \frac{4}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}; 2) \frac{19}{36}; 3) P = \begin{pmatrix} \frac{19}{36} & \frac{17}{36} \\ \frac{17}{48} & \frac{31}{48} \end{pmatrix}.$$

$$\text{№14 } \frac{4}{105}, \frac{12}{49}, \frac{2}{75}, \frac{4}{35}, \frac{998}{3675}. \text{ №15 } \frac{71}{175}. \text{ №16 } \frac{21}{25}. \text{ №17 } \overline{P}(2) = \begin{pmatrix} 0,74 \\ 0,091 \\ 0,169 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№18 } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ №19 } \overline{P}(1) = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \overline{P}(2) = \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,2 \\ 0,21 \end{pmatrix},$$

$$\overline{P}(3) = \begin{pmatrix} 0,513 \\ 0,178 \\ 0,309 \end{pmatrix}. \text{ №20 } 0,0081; 0,07; 0,1288; 0,7931. \text{ №21 } \frac{13}{24}.$$

$$\text{№22 } P = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0 & 0,5 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0,5 & 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}. \text{ №23 } \text{За 2 шага;}$$

$$\text{за 3 шага. } \overline{P}(2) = \begin{pmatrix} \frac{29}{80} \\ \frac{31}{80} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}. \text{ №24 } P = \begin{pmatrix} 0,512 & 0,384 & 0,096 & 0,008 \\ 0,192 & 0,544 & 0,236 & 0,028 \\ 0,072 & 0,354 & 0,476 & 0,098 \\ 0,027 & 0,189 & 0,441 & 0,343 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№25 } 0,344. \text{ №26 } \text{а) } 0,6; \text{ б) } 0,43. \text{ №27 } P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,44 & 0,16 & 0,14 \\ 0,11 & 0,59 & 0,26 & 0,04 \\ 0,06 & 0,39 & 0,46 & 0,09 \\ 0,21 & 0,24 & 0,36 & 0,19 \end{pmatrix}. \text{ №28 } 0,3; 0,504; 0,64272.$$

$$\text{№29 } 1) 3; 3) \text{ да, } \frac{8}{19}, \frac{5}{19}, \frac{6}{19}. \text{ №30 } \text{Да, } \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}. \text{ №31 } \frac{12}{25}, \frac{13}{25}.$$

$$\text{№32 } \frac{15}{41}, \frac{18}{41}, \frac{8}{41}. \text{ №33 } \frac{45}{64}, \frac{15}{64}, \frac{5}{96}, \frac{1}{96}. \text{ №34 } \text{Второе состояние. } \frac{9}{49}, \frac{5}{49},$$

$$\frac{5}{7}. \text{ №35 } 0,2; 0,28; 0,52. \text{ №36 } 1) 1\text{-е или } 2\text{-е. } \frac{123}{425}, \frac{162}{425}, \frac{18}{85}, \frac{2}{17}; 2) 3\text{-е. } \frac{4}{21},$$

$$\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{5}{21}; 3) 3\text{-е. } \frac{61}{237}, \frac{24}{79}, \frac{40}{237}, \frac{64}{237}; 4) 1\text{-е. } \frac{56}{157}, \frac{32}{157}, \frac{28}{157}, \frac{41}{157}; 5) 4\text{-е. } \frac{96}{739},$$

$$\frac{243}{739}, \frac{211}{739}, \frac{189}{739}; 6) 2\text{-е. } \frac{4}{43}, \frac{200}{387}, \frac{9}{43}, \frac{70}{387}. \text{ №37 } 1) P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix};$$

2) 0,3504; 0,3248; 0,3248; 3)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ .

## §6. Стационарные случайные процессы.

**№1** Да. **№2** Да. **№3** Да. **№5** 2. **№6** а) нет; б) нет. **№7** Нет. **№8** Да. **№9** Нет.

## §7. Процессы гибели и размножения.

**№1**  $\frac{12}{17}, \frac{3}{17}, \frac{2}{17}$ . **№2**  $\frac{10}{17}, \frac{4}{17}, \frac{4}{17}$ . **№3**  $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{5}$ . **№4** Не стоит.  
**№5**  $\frac{18}{73}, \frac{30}{73}, \frac{15}{73}, \frac{10}{73}$ .

## §8. Процессы массового обслуживания.

**№1**  $p_0 = \frac{2}{17}; p_1 = \frac{6}{17}; p_2 = \frac{9}{17}; q = \frac{8}{17}; Q = \frac{12}{17}; K_{\text{ср}} = \frac{24}{17}; t_{\text{ср}} = \frac{16}{17}$ . **№2**  $p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}; q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; Q = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; K_{\text{ср}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}; t_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda+\mu}$ . **№3**  $p_0 = \frac{5}{11}; p_1 = \frac{6}{11}; q = \frac{5}{11}; Q = \frac{2}{11}; K_{\text{ср}} = \frac{6}{11}; t_{\text{ср}} = \frac{15}{11}$ . **№4**  $P_{\text{отк}} \approx 0,51; q \approx 0,49; Q \approx 1,47; K_{\text{ср}} \approx 2,94; \bar{z} \approx 5,106; \bar{r} \approx 2,166; \overline{t_{\text{оч}}} \approx 0,722; t_{\text{ср}} \approx 1,702$ . **№5**  $p_0 = \frac{1}{3}; p_k = (\frac{2}{3})^k \cdot \frac{1}{3}, k = 1, 2, \dots; \bar{z} = 2; \bar{r} = \frac{4}{3}; \overline{t_{\text{оч}}} = \frac{2}{3}; t_{\text{ср}} = 1$ . **№6**  $p_0 \approx 0,025; p_1 \approx 0,075; p_2 \approx 0,1125; p_{2+1} \approx 0,169; p_{2+2} \approx 0,253; p_{2+3} \approx 0,380; \bar{r} \approx 1,814; \bar{z} \approx 3,674; \overline{t_{\text{оч}}} \approx 3,023; t_{\text{ср}} \approx 6,123$ . **№7** Выгодно. **№8**  $Q \approx 8,364; K_{\text{ср}} \approx 2,788; \bar{r} \approx 1,536; \overline{t_{\text{оч}}} \approx 0,128; t_{\text{ср}} \approx 0,36$ . **№9** 1)  $q \approx 0,484; Q \approx 1,936; K_{\text{ср}} \approx 0,968; \bar{r} \approx 2,194; \bar{z} \approx 3,161; t_{\text{ср}} \approx 0,79; \overline{t_{\text{оч}}} \approx 0,548$ ; 2)  $q \approx 0,492; Q \approx 1,968; K_{\text{ср}} \approx 0,984; \bar{r} \approx 3,11; \bar{z} \approx 4,095; t_{\text{ср}} \approx 1,024; \overline{t_{\text{оч}}} \approx 0,7775$ . **№10**  $p_0 \approx 0,167; p_1 \approx 0,139; p_2 \approx 0,116; q = 1; Q = 0,25; \bar{z} \approx 4,99; \bar{r} \approx 4,16; K_{\text{ср}} \approx 0,833; t_{\text{ср}} \approx 19,95; \overline{t_{\text{оч}}} \approx 16,62$ . **№11** Предложение нужно отвергнуть. **№12** Пропускная способность уменьшится. **№13** 1) Нет; 2) нет; 3) да. **№14**  $Q \approx 0,841; Q \approx 0,14; K_{\text{ср}} \approx 16,8$ . **№15**  $q = 0,25; Q = 22,5; K_{\text{ср}} = 0,75; t_{\text{ср}} \approx 0,0083$ . **№16**  $p_0 = \frac{4}{7}; p_1 = \frac{3}{7}; q = \frac{4}{7}; Q = \frac{6}{7}; K_{\text{ср}} \frac{3}{7}; t_{\text{ср}} = \frac{2}{7}$ . **№17**  $p_0 \approx 0,473; p_1 \approx 0,355; p_2 \approx 0,133; p_3 \approx 0,033; p_4 \approx 0,006; q \approx 0,994; Q \approx 1,491; K_{\text{ср}} \approx 0,746; t_{\text{ср}} \approx 0,497$ . **№18**  $p_0 \approx 0,111; p_1 \approx 0,222; p_2 \approx 0,222; p_3 \approx 0,148; \approx 0,297; \approx 0,889$ . **№19**  $q \approx 0,484; Q \approx 0,242$ . **№20** 1)  $\frac{81}{665}$ ; 2)  $\frac{32}{665}$ ; 3)  $\frac{52}{133}$ ; 4)  $\frac{264}{665}$ ; 5)  $\frac{306}{133}$ . **№21** 5. **№22** 3. **№23** 1)  $\approx 0,21$ ; 2)  $\approx 0,79$ ; 3)  $\approx 15,8$ ; 4)  $\approx 1,58$ . **№24**  $q \approx 0,978; Q \approx 2,934; K_{\text{ср}} \approx 2,934; t_{\text{ср}} \approx 0,978$ . **№25**  $\approx 0,206; \approx 2,3817$ .

# Приложение 1

Таблица значений функции  $P_k(a) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$

| $k \backslash a$ | 0,1      | 0,2      | 0,3      | 0,4      | 0,5      | 0,6      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1                | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 |
| 2                | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 |
| 3                | 0,000151 | 0,001091 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 |
| 4                | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 |
| 5                |          | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 |
| 6                |          |          | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000035 |
| 7                |          |          |          |          | 0,000001 | 0,000003 |

| $k \backslash a$ | 0,7      | 0,8      | 0,9      | 1,0      | 2,0      | 3,0      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1                | 0,347610 | 0,359463 | 0,365913 | 0,367879 | 0,270671 | 0,149361 |
| 2                | 0,121663 | 0,143785 | 0,164661 | 0,183940 | 0,270671 | 0,224042 |
| 3                | 0,028388 | 0,038343 | 0,049398 | 0,061313 | 0,180447 | 0,224042 |
| 4                | 0,004968 | 0,007669 | 0,011115 | 0,015328 | 0,090224 | 0,168031 |
| 5                | 0,000695 | 0,001227 | 0,002001 | 0,003066 | 0,036089 | 0,100819 |
| 6                | 0,000081 | 0,000164 | 0,000300 | 0,000511 | 0,012030 | 0,050409 |
| 7                | 0,000008 | 0,000019 | 0,000039 | 0,000073 | 0,003437 | 0,021604 |
| 8                |          | 0,000002 | 0,000004 | 0,000009 | 0,000859 | 0,008101 |
| 9                |          |          |          | 0,000001 | 0,000191 | 0,002701 |
| 10               |          |          |          |          | 0,000038 | 0,000810 |
| 11               |          |          |          |          | 0,000007 | 0,000221 |
| 12               |          |          |          |          | 0,000001 | 0,000055 |
| 13               |          |          |          |          |          | 0,000013 |
| 14               |          |          |          |          |          | 0,000003 |
| 15               |          |          |          |          |          | 0,000001 |

Продолжение приложения 1

| $k \backslash a$ | 4,0      | 5,0      | 6,0      | 7,0      | 8,0      | 9,0      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1                | 0,073263 | 0,033690 | 0,014873 | 0,006383 | 0,002684 | 0,001111 |
| 2                | 0,146525 | 0,084224 | 0,044618 | 0,022341 | 0,010735 | 0,004998 |
| 3                | 0,195367 | 0,140374 | 0,089235 | 0,052129 | 0,028626 | 0,014994 |
| 4                | 0,195367 | 0,175467 | 0,133853 | 0,091226 | 0,057252 | 0,033737 |
| 5                | 0,156293 | 0,175467 | 0,160623 | 0,127717 | 0,091604 | 0,060727 |
| 6                | 0,104194 | 0,146223 | 0,160623 | 0,149003 | 0,122138 | 0,091090 |
| 7                | 0,059540 | 0,104445 | 0,137677 | 0,149003 | 0,139587 | 0,117116 |
| 8                | 0,029770 | 0,065278 | 0,103258 | 0,130377 | 0,139587 | 0,131756 |
| 9                | 0,013231 | 0,036266 | 0,068838 | 0,101405 | 0,124077 | 0,131756 |
| 10               | 0,005292 | 0,018133 | 0,041303 | 0,070983 | 0,099262 | 0,118580 |
| 11               | 0,001925 | 0,008242 | 0,022529 | 0,045171 | 0,072190 | 0,097020 |
| 12               | 0,000642 | 0,003434 | 0,011262 | 0,026350 | 0,048127 | 0,072765 |
| 13               | 0,000197 | 0,001321 | 0,005199 | 0,014188 | 0,029616 | 0,050376 |
| 14               | 0,000056 | 0,000472 | 0,002228 | 0,007094 | 0,016924 | 0,032384 |
| 15               | 0,000015 | 0,000157 | 0,000891 | 0,003311 | 0,009026 | 0,019431 |
| 16               | 0,000004 | 0,000049 | 0,000334 | 0,001448 | 0,004513 | 0,010930 |
| 17               | 0,000001 | 0,000014 | 0,000118 | 0,000596 | 0,002124 | 0,005786 |
| 18               |          | 0,000004 | 0,000039 | 0,000232 | 0,000944 | 0,002893 |
| 19               |          | 0,000001 | 0,000012 | 0,000085 | 0,000397 | 0,001370 |
| 20               |          |          | 0,000004 | 0,000030 | 0,000159 | 0,000617 |
| 21               |          |          | 0,000001 | 0,000010 | 0,000061 | 0,000264 |
| 22               |          |          |          | 0,000003 | 0,000022 | 0,000108 |
| 23               |          |          |          | 0,000001 | 0,000008 | 0,000042 |
| 24               |          |          |          |          | 0,000003 | 0,000016 |
| 25               |          |          |          |          | 0,000001 | 0,000006 |
| 26               |          |          |          |          |          | 0,000002 |
| 27               |          |          |          |          |          | 0,000001 |

## Приложение 2

Таблица значений функции  $\sum_{m=0}^k \frac{a^m e^{-a}}{m!}$

| $k \backslash a$ | 0,1      | 0,2      | 0,3      | 0,4      | 0,5      | 0,6      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1                | 0,995321 | 0,982477 | 0,963063 | 0,938448 | 0,909796 | 0,878099 |
| 2                | 0,999845 | 0,998852 | 0,996400 | 0,992074 | 0,985612 | 0,976885 |
| 3                | 0,999996 | 0,999943 | 0,999734 | 0,999224 | 0,998248 | 0,996642 |
| 4                | 1,000000 | 0,999998 | 0,999984 | 0,999939 | 0,999828 | 0,999606 |
| 5                | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999996 | 0,999986 | 0,999962 |
| 6                | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999997 |
| 7                | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |

| $k \backslash a$ | 0,7      | 0,8      | 0,9      | 1,0      | 2,0      | 3,0      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1                | 0,844195 | 0,808792 | 0,772483 | 0,735759 | 0,406006 | 0,199148 |
| 2                | 0,965858 | 0,952577 | 0,937144 | 0,919699 | 0,676677 | 0,423190 |
| 3                | 0,994246 | 0,990920 | 0,986542 | 0,981012 | 0,857124 | 0,647232 |
| 4                | 0,999214 | 0,998589 | 0,997657 | 0,996340 | 0,947348 | 0,815263 |
| 5                | 0,999909 | 0,999816 | 0,999658 | 0,999406 | 0,983437 | 0,916082 |
| 6                | 0,999990 | 0,999980 | 0,999958 | 0,999917 | 0,995467 | 0,966491 |
| 7                | 0,999998 | 0,999999 | 0,999997 | 0,999990 | 0,998904 | 0,988095 |
| 8                | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 0,999999 | 0,999763 | 0,996196 |
| 9                |          |          |          | 1,000000 | 0,999954 | 0,998897 |
| 10               |          |          |          |          | 0,999992 | 0,999707 |
| 11               |          |          |          |          | 0,999999 | 0,999928 |
| 12               |          |          |          |          | 1,000000 | 0,999983 |
| 13               |          |          |          |          |          | 0,999996 |
| 14               |          |          |          |          |          | 0,999999 |
| 15               |          |          |          |          |          | 1,000000 |

Продолжение приложения 2

| $\alpha \backslash k$ | 4,0      | 5,0      | 6,0      | 7,0      | 8,0      | 9,0      |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0                     | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1                     | 0,091579 | 0,040428 | 0,017352 | 0,007295 | 0,003019 | 0,001234 |
| 2                     | 0,238105 | 0,124652 | 0,061970 | 0,029636 | 0,013754 | 0,006232 |
| 3                     | 0,433472 | 0,265026 | 0,151205 | 0,081765 | 0,042380 | 0,021228 |
| 4                     | 0,628839 | 0,440493 | 0,285058 | 0,172991 | 0,099632 | 0,054963 |
| 5                     | 0,785132 | 0,615960 | 0,445681 | 0,300708 | 0,191236 | 0,115690 |
| 6                     | 0,889326 | 0,762183 | 0,606304 | 0,449711 | 0,313374 | 0,206780 |
| 7                     | 0,948866 | 0,866628 | 0,743981 | 0,598714 | 0,452961 | 0,323896 |
| 8                     | 0,978636 | 0,931806 | 0,847239 | 0,729091 | 0,592548 | 0,455652 |
| 9                     | 0,991867 | 0,968172 | 0,916077 | 0,830496 | 0,716625 | 0,587408 |
| 10                    | 0,997159 | 0,986305 | 0,957380 | 0,901479 | 0,815887 | 0,705988 |
| 11                    | 0,999084 | 0,994547 | 0,979909 | 0,946650 | 0,888077 | 0,803008 |
| 12                    | 0,999726 | 0,997981 | 0,991173 | 0,973000 | 0,936204 | 0,875773 |
| 13                    | 0,999923 | 0,999202 | 0,996372 | 0,987188 | 0,965820 | 0,926149 |
| 14                    | 0,999979 | 0,999774 | 0,998600 | 0,994282 | 0,982744 | 0,958533 |
| 15                    | 0,999994 | 0,999931 | 0,999491 | 0,997593 | 0,991770 | 0,977964 |
| 16                    | 0,999998 | 0,999980 | 0,999825 | 0,999041 | 0,996283 | 0,988894 |
| 17                    | 0,999999 | 0,999994 | 0,999943 | 0,999637 | 0,998407 | 0,994680 |
| 18                    | 0,999999 | 0,999998 | 0,999982 | 0,999869 | 0,999351 | 0,997573 |
| 19                    | 0,999999 | 0,999999 | 0,999994 | 0,999955 | 0,999748 | 0,998943 |
| 20                    | 1,000000 | 0,999999 | 0,999998 | 0,999985 | 0,999907 | 0,999560 |
| 21                    |          | 1,000000 | 0,999999 | 0,999995 | 0,999967 | 0,999824 |
| 22                    |          |          | 0,999999 | 0,999998 | 0,999989 | 0,999932 |
| 23                    |          |          | 1,000000 | 0,999999 | 0,999997 | 0,999974 |
| 24                    |          |          |          | 0,999999 | 0,999999 | 0,999990 |
| 25                    |          |          |          | 1,000000 | 0,999999 | 0,999996 |
| 26                    |          |          |          |          | 1,000000 | 0,999998 |
| 27                    |          |          |          |          |          | 0,999999 |
| 28                    |          |          |          |          |          | 1,000000 |

## Список литературы

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Задачи и упражнения по теории вероятностей* // М., 2003
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения* // М., 2000
3. Гмурман В.Е. *Теория вероятностей и математическая статистика* // М., "Высшая школа", 2003
4. Емельянов Г.В., Скитович В.П. *Задачник по теории вероятностей и математической статистике* // Изд-во Ленинградского ун-та, 1967
5. Лабскер Л.Г. *Вероятностное моделирование в финансово-экономической области* // М., 2002
6. Миллер Б.М., Панков А.Р. *Теория случайных процессов в примерах и задачах* // М., 2002
7. Тихомиров Н.Б. *Случайные процессы* // Тверь, 2002